

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

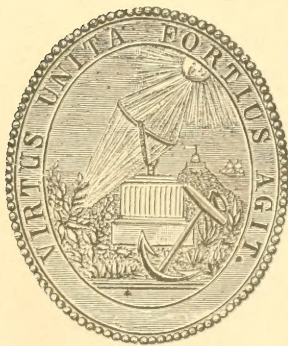
PORTO

ANNAES SCIENTIFICOS
DA
ACADEMIA POLYTECHNICA
DO
PORTO

PUBLICADOS SOB A DIRECÇÃO
DE
F. GOMES TEIXEIRA

VOLUME V

(Publicação official)



COIMBRA
IMPRESA DA UNIVERSIDADE
1909

118545
21/9/11



R. 5750

ÉSSAI D'UNE THÉORIE ANALYTIQUE DES LIGNES NON-EUCLIDIENNES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

à Rome

AVANT-PROPOS

Ce travail est divisé en trois parties: *lignes planes, lignes de l'espace et lignes tracées sur une surface*. — Il est inspiré à deux principes tout à fait modernes: l'introduction de plusieurs systèmes de coordonnées, autres que les systèmes ordinaires devenus classiques, et la représentation des plans et des espaces non-euclidiens sur le plan et l'espace ordinaire.

En vertu du premier principe nous sommes à même, dans l'abord d'une question géométrique, de faire le choix du système de coordonnées que l'on reconnaît le plus propre, du point de vue de la simplicité. — Le deuxième principe réduit l'étude des lignes, des surfaces et plus généralement des figures non-euclidiennes, à l'étude des lignes, des surfaces et des figures ordinaires. C'est ainsi que l'on a pu condenser la géométrie projective en peu de pages.

Quant à la géométrie analytique, elle a été limitée à la résolution des questions essentielles, qui ont quelques applications dans la suite.

La géométrie infinitésimale a reçu un développement plus complet, grâce surtout à l'introduction de plusieurs systèmes de coordonnées nouvelles, susceptibles d'une foule d'applications remarquables.

Dans la deuxième partie (bien qu'il s'agisse proprement de lignes) il a été impossible de se passer de la considération de quelques surfaces et de quelques solides, dont on a évalué respectivement l'aire et le volume (cône, hypercône, horicône, canal circulaire, canal générique, sphère, surface de révolution, hélicoïde, pseudo-hélicoïde).

On a réussi de même à toucher en quelques points remarquables l'importante théorie de l'applicabilité des surfaces, au moyen d'une déformation par flexion.

La géométrie non-euclidienne est sans doute plus difficile que la géométrie ordinaire. Ses formules sont, en général, plus compliquées, de sorte que certaines intégrations, effectuaibles dans la géométrie ordinaire, sont impossibles dans les deux géométries non-euclidiennes.

Mais il y a ici, en revanche, une variété et une richesse absolument inconnues dans la vieille géométrie d'*Euclide*, car certaines figures non-euclidiennes n'ont pas leurs correspondantes dans la géométrie ordinaire. — L'hypercycle et l'horicycle dans le plan, l'hypersphère et l'horisphère, l'hypercône, l'horicône et le canal dans l'espace, en sont des exemples frappants.

On doit enfin remarquer que nos formules contiennent une particularisation, en y ayant supposé, pour plus de simplicité, que la constante caractéristique (*paramètre*) de chacun espace non-euclidien soit égale à l'unité. — Mais on pourrait aisément modifier les formules de façon, à rendre à ce paramètre toute sa généralité.

Ceux qui, voulant étudier cet *Essai*, n'ont pas de familiarité avec la géométrie non-euclidienne élémentaire, peuvent consulter quelqu'un de ces travaux :

BELTRAMI — *Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea* (Giornale di Matematiche, 1868).

N. LOBATSCHESKY — *Pangeometria, o saggio di geometria fondata sopra una teoria generale rigorosa delle parallele*. (Traduction de G. Battaglini, Naples, 1874).

G. BOLYAI — *Sulla scienza dello spazio assolutamente vera*. (Traduction de G. Battaglini, Naples, 1875).

L. GÉRARD — *Sur la géométrie non-euclidienne*. Thèse. (Paris, 1892).

P. MANSION — *Premiers principes de la Métageométrie*. (Conférences à l'Institut supérieur de Philosophie, Louvain, 1895).

P. MANSION — *Principes fondamentaux de la géométrie non-euclidienne de RIEMANN* (Paris, Gauthier-Villars, 1895).

PREMIÈRE PARTIE

Lignes planes

CHAPITRE I

§ 1

Quelques systèmes de coordonnées. — Soient Ox , Oy deux droites orthogonales (*axes*), issues du point O (*origine*), sur lesquelles on a fixé préalablement les directions positive et négative. — Si d'un point arbitraire M du plan on mène les droites MA , MB perpendiculaires aux axes Ox , Oy , la position du point M est définie aussitôt que l'on donne (en valeur et en signe):

1° L'angle $\angle xOM = \omega$ et la distance absolue $OM = R$ (*coordonnées polaires*).

2° Les distances $OA = x$, $OB = y$ (*coordonnées cartésiennes*).

3° Les distances $BM = p$, $AM = q$ (*coordonnées normales*).

4° Les distances $OA = u$, $AM = v$ (*coordonnées géographiques*).

Il est à peine nécessaire de remarquer que, dans le plan euclidien, les trois systèmes de coordonnées cartésiennes, normales et géographiques reviennent l'un à l'autre.

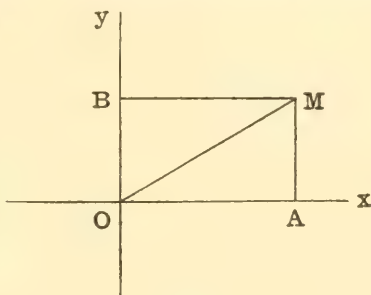


Fig. 1

§ 2

Relations entre les coordonnées polaires, cartésiennes et normales. — Si le plan est riemannien, on déduit des triangles rectangles MAO, MBO:

$$\operatorname{tg} OA = \operatorname{tg} OM \cdot \cos \angle AOM, \quad \operatorname{tg} OB = \operatorname{tg} OM \cdot \cos \angle BOM$$

$$\sin BM = \sin OM \cdot \sin \angle BOM, \quad \sin AM = \sin OM \cdot \sin \angle AOM.$$

En s'appuyant sur ces formules et sur les formules analogues

du plan lobatschewskien, on trouve les relations suivantes :

Dans le plan riemannien

$$(1) \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} R \cdot \cos \omega, \quad \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} R \cdot \sin \omega$$

$$(2) \quad \sin p = \sin R \cdot \cos \omega, \quad \sin q = \sin R \cdot \sin \omega,$$

et d'ici par des combinaisons évidentes

$$(3) \quad \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = \operatorname{tg}^2 R, \quad \sin^2 p + \sin^2 q = \sin^2 R$$

$$(4) \quad \sin p = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y}}, \quad \sin q = \frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y}}$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin p}{\sqrt{1 - \sin^2 p - \sin^2 q}}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{\sin q}{\sqrt{1 - \sin^2 p - \sin^2 q}}.$$

Dans le plan lobatschewskien

$$(1') \quad thx = th R \cdot \cos \omega, \quad thy = th R \cdot \sin \omega$$

$$(2') \quad shp = sh R \cdot \cos \omega, \quad shq = sh R \cdot \sin \omega$$

$$(3') \quad th^2 x + th^2 y = th^2 R, \quad sh^2 p + sh^2 q = sh^2 R$$

$$(4') \quad shp = \frac{thx}{\sqrt{1 - th^2 x - th^2 y}}, \quad shq = \frac{thy}{\sqrt{1 - th^2 x - th^2 y}}$$

$$(5') \quad thx = \frac{shp}{\sqrt{1 + sh^2 p + sh^2 q}}, \quad thy = \frac{shq}{\sqrt{1 + sh^2 p + sh^2 q}}.$$

§ 3

Relations entre les coordonnées géographiques, cartésiennes et normales. — Considérons d'abord le quadrilatère riemannien ABCD, en y supposant

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{2}.$$

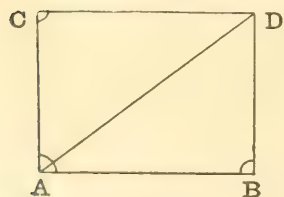


Fig. 2

Si l'on trace la diagonale AD, on obtient les triangles rectangles ABD,

ACD donnant les relations

$$\begin{cases} \sin CD = \sin AD \cdot \sin \hat{CAD} = \sin AD \cdot \cos \hat{BAD}, & \sin AB = \sin AD \cdot \sin \hat{ADB} \\ \cos \hat{BAD} = \sin \hat{ADB} \cdot \cos BD \\ \begin{cases} \operatorname{tg} CD = \sin AC \cdot \operatorname{tg} \hat{CAD}, & \operatorname{tg} AB = \operatorname{tg} AD \cdot \cos \hat{BAD} = \operatorname{tg} AD \sin \hat{CAD} \\ \operatorname{tg} AC = \operatorname{tg} AD \cdot \cos \hat{CAD}. \end{cases} \end{cases}$$

On déduit d'ici

$$\begin{aligned} \frac{\sin CD}{\sin AB} &= \frac{\cos \hat{BAD}}{\sin \hat{ADB}} = \frac{\sin \hat{ADB} \cdot \cos BD}{\sin \hat{ADB}} = \cos BD \\ \operatorname{tg} \frac{CD}{AB} &= \frac{\sin AC \cdot \operatorname{tg} \hat{CAD}}{\operatorname{tg} AD \cdot \sin \hat{CAD}} = \frac{\sin AC}{\operatorname{tg} AD \cdot \cos \hat{CAD}} = \frac{\sin AC}{\operatorname{tg} AC} \cos AC. \end{aligned}$$

En faisant des considérations analogues dans le plan lobatschewskien, on voit que *les cotés d'un quadrilatère trirectangle ABCD vérifient les relations*

$$(6) \quad \frac{\sin CD}{\sin AB} = \cos BD, \quad \frac{\operatorname{tg} CD}{\operatorname{tg} AB} = \cos AC \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(6') \quad \frac{\operatorname{sh} CD}{\operatorname{sh} AB} = \operatorname{ch} BD, \quad \frac{\operatorname{th} CD}{\operatorname{th} AB} = \operatorname{ch} AC \quad (\text{dans le p. l.})$$

Les formules (6), (6') appliquées au quadrilatère trirectangle OABM du § 1, dans lequel on a $AO = x = u$, $OB = y$, $AM = v = p$, $BM = q$, donnent les équations

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} u = x, \quad \operatorname{tg} v = \cos x \cdot \operatorname{tg} y \\ \sin p = \sin u \cdot \cos v, \quad q = v \end{aligned} \right\} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(7') \quad \left. \begin{aligned} u = x, \quad \operatorname{th} v = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{th} y \\ \operatorname{sh} p = \operatorname{sh} u \cdot \operatorname{ch} v, \quad q = v \end{aligned} \right\} \quad (\text{dans le p. l.}).$$

CHAPITRE II

§ 4

Distance de deux points. — En désignant par d la distance entre les points $A(R, \omega)$, $B(R_1, \omega_1)$ du plan riemannien, le triangle OAB donne

$$(1) \begin{cases} \cos d = \cos R \cos R_1 - \sin R \sin R_1 \cos(\omega - \omega_1) \\ -\cos R \cos R_1 + \sin R \sin R_1 \cos \omega \cos \omega_1 + \sin R \sin R_1 \sin \omega \sin \omega_1. \end{cases}$$

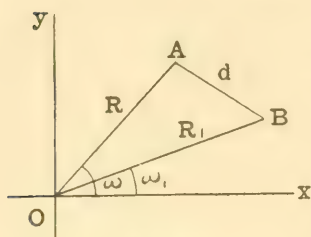


Fig. 3

Si l'on veut introduire ici les coordonnées cartésiennes (x, y) , (x_1, y_1) des points A, B , il suffit d'employer les relations

$$\cos R = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y}},$$

$$\cos R_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 y_1}}$$

$$\cos \omega = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} R} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y}}, \quad \cos \omega_1 = \frac{\operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} R_1} = \frac{\operatorname{tg} x_1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 y_1}},$$

que l'on déduit des équations (1), (3) du § 2.

Si l'on fait un calcul analogue dans le plan lobatschewskien, et que l'on pose en outre pour abrégé

$$(2) \quad \xi = \operatorname{tg} x, \quad \eta = \operatorname{tg} y$$

$$(2') \quad \xi = \operatorname{th} x, \quad \eta = \operatorname{th} y$$

suivant que le plan est riemannien ou lobatschewskien, on trouve que la distance d entre les points $A(\xi, \eta)$, $B(\xi_1, \eta_1)$ est déterminée par une des formules:

$$(3) \quad \begin{cases} \cos d = \frac{1 + \xi\xi_1 + \eta\eta_1}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2} \sqrt{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2}}, \\ \sin d = \frac{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\xi\eta_1 - \xi_1\eta)^2}}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2} \sqrt{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2}}, \\ \operatorname{tg} d = \frac{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\xi\eta_1 - \xi_1\eta)^2}}{1 + \xi\xi_1 + \eta\eta_1} \end{cases}$$

dans le plan riemannien, et

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} chd &= \frac{1 - \xi \xi_1 - \eta \eta_1}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{1 - \xi_1^2 - \eta_1^2}}, \\ shd &= \frac{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 - (\eta - \eta_1)^2} - (\xi \eta_1 - \xi_1 \eta)^2}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{1 - \xi_1^2 - \eta_1^2}}, \\ thd &= \frac{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 - (\eta - \eta_1)^2} - (\xi \eta_1 - \xi_1 \eta)^2}{1 - \xi \xi_1 - \eta \eta_1} \end{aligned} \right.$$

dans le plan lobatschewskien.

Remarque. — Les variables ξ, η , liées aux coordonnées cartésiennes x, y , par les relations (2), (2'), constituent un système très remarquable de coordonnées, dont on fera souvent usage dans la suite.

§ 5

La droite. — Soient: $OP = \Delta$ la distance de l'origine à une droite riemannienne r , $\omega OP = \theta$ l'inclinaison de Δ sur l'axe Ox et $M(R, \omega)$ un point quelconque de r défini par ses coordonnées polaires.

Le triangle rectangle OPM donne la relation

$$\operatorname{tg} OM = \frac{\operatorname{tg} OP}{\cos MOP},$$

c'est-à-dire

$$(4) \quad \operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} \Delta}{\cos(\omega - \theta)}.$$

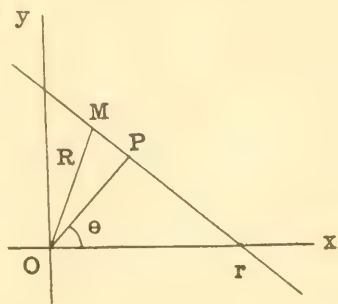


Fig. 4

Telle est l'équation de la droite en coordonnées polaires.

En appliquant les relations (1) du § 2 à l'équation (4) préalablement écrite sous la forme

$$\cos \theta (\operatorname{tg} R \cos \omega) + \sin \theta (\operatorname{tg} R \sin \omega) = \operatorname{tg} \Delta,$$

on trouve que la droite r est représentée par l'équation

$$(5) \quad \cos \theta \cdot \operatorname{tg} x + \sin \theta \cdot \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \Delta$$

linéaire en $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y$.

Celle-ci identifiée à l'équation linéaire générique

$$(6) \quad a \operatorname{tg} x + b \operatorname{tg} y = c,$$

où a, b, c sont des constantes, donne les conditions

$$(7) \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cot \theta = \frac{a}{b}.$$

On conclut que *sur le plan riemannien l'équation linéaire générique (6) définit la droite dont la distance à l'origine a une valeur Δ et une inclinaison θ sur l'axe Ox , définies par les relations (7).*

Sur le plan lobatschewskien les équations (4), (5), (6), (7) sont remplacées respectivement par les autres

$$(4') \quad \operatorname{th} R = \frac{\operatorname{th} \Delta}{\cos(\omega - \theta)}$$

$$(5') \quad \cos \theta \cdot \operatorname{th} x + \sin \theta \cdot \operatorname{th} y = \operatorname{th} \Delta$$

$$(6') \quad a \operatorname{th} x + b \operatorname{th} y = c$$

$$(7') \quad \operatorname{th} \Delta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cot \theta = \frac{a}{b}.$$

Si l'on élimine x, y , entre les équations (5), (5') ci-dessus et les équations (6), (6') du § 3, on trouve

$$(8) \quad \cos \theta \sin u + \sin \theta \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} \Delta \cos u$$

$$(8') \quad \cos \theta \operatorname{sh} u + \sin \theta \operatorname{th} v = \operatorname{th} \Delta \operatorname{ch} u$$

Ce sont les équations de la droite (riemannienne ou lobatschewskienne) en coordonnées géographiques.

Cas particulier. — Si l'on suppose que la droite passe à l'origine, en formant l'angle ε avec l'axe Ox , on a $\Delta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, et les équations (8), (8') reviennent aux autres

$$(9) \quad \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \sin u$$

$$(9') \quad \operatorname{th} v = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{sh} u.$$

§ 6

En comparant les équations cartésiennes (5), (5') de la droite

non-euclidienne à l'équation cartésienne de la droite ordinaire, on est amené tout naturellement à ces définitions: Une ligne plane $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannienne} \\ \text{lobatschewskienne} \end{array} \right\}$ est *algébrique* ou *transcendante*, suivant que son équation est algébrique ou transcendante par rapport aux variables $\left\{ \begin{array}{l} \lg x, \lg y \\ \operatorname{th} x, \operatorname{th} y \end{array} \right\}$.

Dans le premier cas le degré de l'équation, réduite à forme rationnelle et entière, est l'*ordre* de la ligne. — Cet important élément géométrique des lignes, absolument indépendant du choix des axes cartésiennes de référence, exprime le nombre des points (réels ou imaginaires) où la ligne est coupée par une droite quelconque du plan.

§ 7

Nature des points. — Dans l'hypothèse $\xi_1 = \eta_1 = 0$ les équations (3), (3') démontrent que la distance d entre l'origine et le point générique (ξ, η) du plan est définie par une des équations

$$(10) \quad \cos d = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2 + \eta^2}}$$

$$(10') \quad chd = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}.$$

On voit de la relation (10) que la distance d est toujours réelle et finie, quelles que soient les valeurs que l'on attribue à ξ et η , de sorte que les points du plan riemannien n'offrent pas de différence en ce qui concerne leur nature; il sont tous réels et à distance finie.

Quant à la relation (10'), on peut faire indifféremment les trois hypothèses

$$(11) \quad \xi^2 + \eta^2 - 1 \begin{cases} < 0, \\ = 0, \\ > 0, \end{cases}$$

correspondant aux cas où d est respectivement:

- A) réel et fini (*point réel et à distance finie*)
- B) réel et infini (*point-limite*)
- C) imaginaire (*point idéal*).

Nature des droites. — Comme la relation (7) donne une valeur déterminée et finie de Δ , quelles que soient les valeurs des paramètres a, b, c , paraissant dans l'équation (6), on conclut que

sur le plan riemannien il n'y a qu'une seule espèce de droites.

Quant à l'équation (7'), on peut faire indifféremment les trois hypothèses

$$(12) \quad a^2 + b^2 - c^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0,$$

correspondant aux cas où Δ est respectivement:

A) réelle et finie (*droite réelle et à distance finie*)

B) réelle et infinie (*droite-limite*)

C) imaginaire (*droite idéale*).

Les coordonnées (ξ_0, η_0) du point d'intersection des droites

$$a\xi + b\eta + c = 0, \quad a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0$$

sont exprimées par les équations

$$\xi_0 = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \quad \eta_0 = \frac{a_1c - ac_1}{ab_1 - a_1b}.$$

Ce point est toujours réel sur le plan riemannien.

S'il s'agit au contraire de droites lobatschewskiennes, on reconnaît par l'application de la relation (11) que leur intersection est un point réel à distance finie, un point-limite ou un point idéal, suivant que les coefficients a, b, c, a_1, b_1, c_1 , vérifient respectivement l'une ou l'autre des relations

$$(13) \quad (bc_1 - b_1c)^2 + (ca_1 - c_1a)^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} (ab_1 - a_1b)^2.$$

§ 8

Angles de deux droites. — Soient

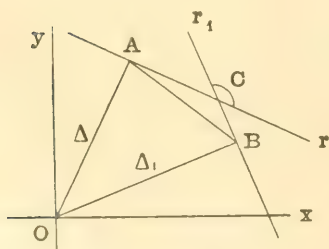


Fig. 5

$$(14) \quad \begin{cases} a\xi + b\eta + c = 0, \\ a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0 \end{cases}$$

les équations de deux droites r, r_1 qui se coupent au point C, $OA = \Delta$ et $OB = \Delta_1$ leurs distances à l'origine et $\alpha OA = \theta$, $\alpha OB = \theta_1$ les inclinaisons de ces distances sur l'axe Ox . — Si le plan est rieman-

nien, on a les relations (§ 5)

$$(15) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta &= -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \operatorname{tg} \Delta_1 &= -\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \\ \cot \theta &= \frac{a}{b}, & \cot \theta_1 &= \frac{a_1}{b_1}. \end{aligned}$$

On déduit du triangle ABC :

$$\begin{aligned} \pm \cos (rr_1) &= -\cos \hat{\text{CAB}} \cdot \cos \hat{\text{CBA}} + \sin \hat{\text{CAB}} \cdot \sin \hat{\text{CBA}} \cdot \cos \text{AB} \\ &= -\sin \hat{\text{BAO}} \cdot \sin \hat{\text{ABO}} + \cos \hat{\text{BAO}} \cdot \cos \hat{\text{ABO}} \cdot \cos \text{AB}. \end{aligned}$$

Mais comme d'ailleurs dans tout triangle riemannien ABC ont lieu des relations de la forme

$$\sin \text{A} \sin \text{B} - \cos \text{A} \cos \text{B} \cdot \cos c = \sin a \sin b + \cos a \cos b \cdot \cos \text{C}$$

que CAGNOLI démontra, le premier, pour les triangles sphériques ordinaires, l'équation ci-dessus revient à l'autre :

$$\begin{aligned} \pm \cos (rr_1) &= -(\sin \text{OA} \cdot \sin \text{OB} + \cos \text{OA} \cdot \cos \text{OB} \cos \hat{\text{AOB}}) \\ &= -[\sin \Delta \sin \Delta_1 + \cos \Delta \cos \Delta_1 \cdot \cos (\theta - \theta_1)] \\ &= -(\sin \Delta \sin \Delta_1 + \cos \Delta \cos \Delta_1 \cos \theta \cos \theta_1 + \cos \Delta \cos \Delta_1 \sin \theta \sin \theta_1). \end{aligned}$$

En rappelant ici les relations (15), et en faisant un calcul analogue dans le plan lobatschewskien, on trouve que l'angle formé par les droites (14) est défini par une des équations

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos (rr_1) &= \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}}, \\ \sin (rr_1) &= \frac{\sqrt{(ab_1 - a_1b)^2 + (bc_1 - b_1c)^2 + (ca_1 - c_1a)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}}, \\ \operatorname{tg} (rr_1) &= \frac{\sqrt{(ab_1 - a_1b)^2 + (bc_1 - b_1c)^2 + (ca_1 - c_1a)^2}}{aa_1 + bb_1 + cc_1}. \end{aligned} \right.$$

$$(16') \quad \left\{ \begin{aligned} \cos (rr_2) &= \frac{aa_1 + bb_1 - cc_1}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}}, \\ \sin (rr_1) &= \frac{\sqrt{(ab_1 - a_1b)^2 - (bc_1 - b_1c)^2 - (ca_1 - c_1a)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}}, \\ \operatorname{tg} (rr_1) &= \frac{\sqrt{(ab_1 - a_1b)^2 - (bc_1 - b_1c)^2 - (ca_1 - c_1a)^2}}{aa_1 + bb_1 - cc_1}. \end{aligned} \right.$$

On voit d'ici que la condition d'orthogonalité des droites (14) est exprimée par l'équation

$$(17) \quad aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0 \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(17') \quad aa_2 - bb_1 - cc_1 = 0 \quad (\text{dans le p. l.}).$$

On reconnaît de la deuxième équation (16) que $\sin(r)$ est toujours réel et qu'il s'annule seulement quand

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c},$$

ce qui porte à la coïncidence des droites. Conséquemment deux droites riemanniennes distinctes forment toujours un angle réel et différent de zéro.

La deuxième équation (16') démontre au contraire que pour deux droites lobatschewskiennes ce sont possibles les trois hypothèses

$$(18) \quad (bc_1 - b_1c)^2 + (ca_1 - c_1a)^2 \leq (ab_1 - a_1b)^2,$$

correspondant aux cas où les droites forment respectivement un angle réel et différent de zéro, un angle nul, ou un angle imaginaire.

La formule (13) nous apprend qu'en correspondance de ces cas, le point où les droites se coupent est respectivement un point réel à distance finie, un point-limite, ou un point idéal.

§ 9

Soient

$$(19) \quad a\xi + b\eta + c = 0, \quad a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0, \quad a_2\xi + b_2\eta + c_2 = 0$$

les équations de trois droites non-euclidiennes. — Les conditions d'orthogonalité entre la troisième droite et chacune des autres, sont exprimées par les relations (§ 8)

$$aa_2 + bb_2 \pm cc_2 = 0, \quad a_1a_2 + b_1b_2 \pm c_1c_2 = 0,$$

le signe supérieur se rapportant au plan riemannien et l'inférieur au plan lobatschewskien.

Or comme l'on déduit d'ici

$$\pm \frac{a_2}{c_2} = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}, \quad \pm \frac{b_2}{c_2} = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b},$$

on peut prendre

$$a_2 : b_2 : c_2 = (b_1c - bc_1) : (ac_1 - a_1c) : \mp (ab_1 - a_1b),$$

ce qui réduit la troisième équation (19) à la forme :

$$(20) \quad (b_1c - bc_1)\xi + (ac_1 - a_1c)\eta \mp (ab_1 - a_1b) = 0.$$

La réalité de la droite (20), tout à fait inconditionnée dans le plan riemannien, est subordonnée à la condition

$$(21) \quad (b_1c - bc_1)^2 + (ac_1 - a_1c)^2 > (ab_1 - a_1b)^2$$

dans le plan lobatschewskien, ainsi qu'il résulte de la relation (12). — Mais comme cette condition (21) exprime à son tour le fait que les deux premières droites (19) se coupent en un point idéal [équation (13)], on a le théorème: *Deux droites quelconques d'un plan non euclidien admettent toujours une perpendiculaire commune. Cette droite: A) dans le plan riemannien est toujours réelle — B) dans le plan lobatschewskien est réelle seulement si les droites se coupent en un point idéal.*

Soit Ox la perpendiculaire commune aux droites Oy , AB et $OA = m$ le segment de la perpendiculaire compris entre ces droites. — La droite AB est évidemment représentée, en coordonnées géographiques, par l'équation $u = m$. — Or si d'un point quelconque M de AB on abaisse la perpendiculaire $MN = p$ sur l'axe Oy , on obtient d'ici à l'aide des relations (8), (8') du § 3 :

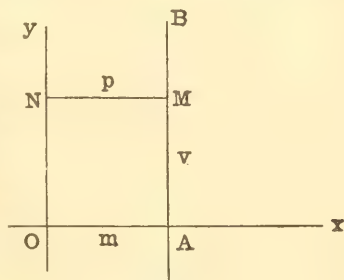


Fig. 6

$$(22) \quad \sin p = \sin m \cdot \cos v \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(22') \quad \text{sh } p = \text{sh } m \cdot \text{ch } v \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Ces équations démontrent qu'à la valeur zéro de la coordonnée v correspond le *maximum* de $\sin p$ et le *minimum* de $\text{sh } p$, de sorte que la portion de la perpendiculaire commune à deux droites $\left\{ \begin{array}{l} \text{lobatschewskiennes} \\ \text{riemanniennes} \end{array} \right\}$ comprise entre ces droites, est la

plus $\left\{ \begin{array}{l} \text{grande} \\ \text{petite} \end{array} \right\}$ des distances entre les points d'une de ces droites et l'autre.

En supposant $v = \pm \frac{\pi}{2}$, la relation (22) donne $\sin p = 0$, ce qui démontre que dans le plan riemannien les perpendiculaires à une droite passent par deux points fixes (pôles) situées à la distance $\frac{\pi}{2}$ de cette droite.

Il suit d'ici qu'une droite riemannienne peut être considérée comme un cercle de rayon $\frac{\pi}{2}$.

Lorsque la variable v augmente indéfiniment, $\operatorname{ch} v$ a pour limite l'infini et il résulte de la relation (22')

$$\lim_{v=\infty} (\operatorname{sh} p) = \infty.$$

On conclut que dans le plan lobatschewskien deux perpendiculaires à une même droite sont des droites divergentes.

Autrement dit, le pôle d'une droite lobatschewskienne est un point idéal.

§ 10

Distance d'un point à une droite. — Soit r la droite représentée par l'équation

$$(23) \quad a\xi + b\eta + c = 0,$$

$OP = \Delta$ la perpendiculaire abaissée de l'origine et $\angle \hat{O}P = \theta$ l'inclinaison de cette perpendiculaire sur l'axe Ox .

Si du point donné $A(R, \omega)$ on abaisse les perpendiculaires $AB = \delta$ et AC respectivement sur r et OP , les triangles rectangles ABP , ACP donnent les relations

$$\sin AB = \sin AP \cdot \sin \hat{A}PB, \quad \sin CP = \sin AP \cdot \sin \hat{P}AC,$$

$$\cos \hat{A}PC = \sin \hat{P}AC \cdot \cos AC,$$

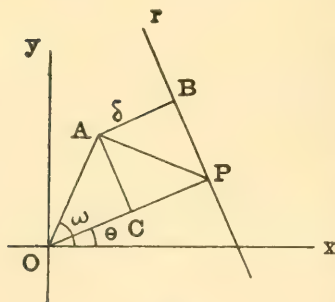


Fig. 7

d'où il suit

$$\begin{aligned}\frac{\sin AB}{\sin CP} &= \frac{\sin \widehat{APB}}{\sin \widehat{PAC}} = \frac{\cos \widehat{APC}}{\sin \widehat{PAC}} = \cos AC, \\ \sin AB &= \sin CP \cdot \cos AC = \sin(OP - OC) \frac{\cos OA}{\cos OC} \\ &= \sin OP \cos OA - \cos OP (\cos OA \cdot \operatorname{tg} OC).\end{aligned}$$

Or comme l'on déduit du triangle rectangle ACO :

$$\cos OA \cdot \operatorname{tg} OC = \sin OA \cdot \cos \widehat{POA},$$

la relation ci-dessus revient à l'autre

$$\sin AB = \sin OP \cdot \cos OA - \cos OP \cdot \sin OA \cos \widehat{POA},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin \Delta \cos R - \cos \Delta \sin R \cos (\theta - \omega) \\ &= \sin \Delta \cos R - \cos \Delta \sin R \sin \theta \sin \omega - \cos \Delta \sin R \cos \theta \cos \omega.\end{aligned}$$

Si l'on remarque enfin que (§§ 2-8)

$$\operatorname{tg} R = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}, \quad \cot \omega = \frac{\xi_1}{\eta_1}, \quad \operatorname{tg} \Delta = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cot \theta = \frac{a}{b}$$

ξ_1 et η_1 étant les coordonnées du point A, on a le théorème:
La distance δ du point (ξ_1, η_1) à la droite (23) est définie par la formule

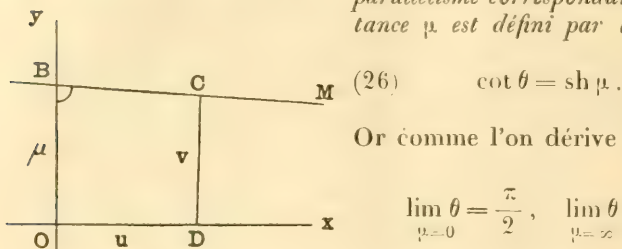
$$(24) \quad \sin \delta = \frac{a\xi_1 + b\eta_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + 1}} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(24') \quad \operatorname{sh} \delta = \frac{a\xi_1 + b\eta_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{-\xi_1^2 - \eta_1^2 + 1}} \quad (\text{dans le p. l.}).$$

§ 11

Droites parallèles. — Soient BM une droite (nécessairement lobatschewskienne) parallèle à l'axe Ox et coupant le segment $OB = \mu$ sur l'axe Oy , Λ_∞ le point-limite de Ox et θ l'angle de parallélisme $O\widehat{B}M$.

Le triangle rectangle $A_{\infty}OB$ démontre aussitôt que l'angle de parallélisme correspondant à la distance μ est défini par la relation



Or comme l'on dérive d'ici

$$\lim_{\mu=0} \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\mu=\infty} \theta = 0,$$

Fig. 8

on conclut que l'angle de paral-

lélisme part de la valeur $\frac{\pi}{2}$ (pour $\mu=0$) et décroît indéfiniment lorsque μ augmente; de sorte que les parallèles à l'axe Ox , menées par les points successifs de l'axe Oy , sont d'autant plus inclinées sur Oy , que la distance μ est plus grande.

En ayant recours à la formule (24'), on peut dire que l'angle de parallélisme relatif au point (ξ_1, γ_1) et à la droite (23) est défini par la relation

$$(26) \quad \cot \theta = \frac{a\xi_1 + b\gamma_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{-\xi_1^2 - \gamma_1^2 + 1}}.$$

La condition de parallélisme de deux droites coïncide évidemment avec la condition qu'elle se coupent sur le cercle-limite. — Il s'ensuit (§ 7) que la condition de parallélisme pour les droites

$$ax + by + c = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

est exprimée par la relation

$$(27) \quad (ac_1 - a_1c)^2 + (bc_1 - b_1c)^2 = (ab_1 - a_1b)^2.$$

Celle-ci, comparée à l'équation (18), démontre que deux droites parallèles forment un angle nul, et vice versa.

En partant de cette propriété caractéristique, on obtient aussitôt les résultats suivants:

La condition de parallélisme entre deux droites est réciproque.

Si une droite est parallèle à une autre droite pour un certain point particulier, elle conserve ce caractère pour tout autre point de son parcours.

§ 12

L'équation

$$\frac{\xi}{\operatorname{th} \lambda} + \frac{\eta}{\operatorname{th} \mu} = 1,$$

considérée sur le plan lobatschewskien, représente évidemment la droite qui coupe les segments λ , μ sur les axes Ox , Oy . Si l'on suppose ici $\lambda = \infty$ (et conséquemment $\operatorname{th} \lambda = 1$), on trouve que la parallèle à l'axe Ox et coupant le segment μ sur l'axe Oy , est définie par l'équation

$$(28) \quad \xi + \frac{\eta}{\operatorname{th} \mu} = 1.$$

Or si l'on rappelle la signification des variables ξ , η (§ 4) et que l'on introduise les coordonnées géographiques u , v à l'aide des relations (7') du § 3, l'équation de la parallèle revient à la forme

$$(29) \quad \operatorname{th} v = \operatorname{th} \mu (\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u).$$

Or comme

$$\lim_{u=\infty} (\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u) = \lim_{u=\infty} e^{-u} = 0,$$

l'équation (29) donne

$$\lim_{u=\infty} \operatorname{th} v = 0, \quad \text{et ensuite} \quad \lim_{u=\infty} v = 0.$$

Cela démontre que deux droites parallèles sont à regarder comme deux lignes qui vont se rejoindre asymptotiquement à l'infini.

L'équation de la parallèle à la droite

$$(30) \quad a\xi + b\eta + c = 0$$

menée du point (ξ_1, η_1) est

$$(31) \quad x - \eta_1 = k(\xi - \xi_1),$$

k designant un paramètre convenable (inconnu). Or si l'on écrit l'équation (31) sous la forme

$$a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0,$$

ce qui correspond à prendre

$$a_1 = k, \quad b_1 = -1, \quad c_1 = -(k\xi_1 - \eta_1),$$

on trouve que la condition de parallélisme (27) se réduit à l'équation

$$(32) \quad [(a\xi_1 + c)^2 + b^2\xi_1^2 - b^2]k^2 - 2[b\xi_1(b\eta_1 + c) + a\eta_1(a\xi_1 + c) + ab]k + a^2\eta_1^2 + (b\eta_1 + c)^2 - a^2 = 0,$$

qui nous fournit deux valeurs pour k .

Il y a donc deux parallèles à la droite (30) passant au point (ξ_1, η_1) ; leurs équations s'obtiennent de l'équation (31) en y remplaçant k successivement par les racines de l'équation (32).

Dans le cas particulier $\xi_1 = \eta_1 = 0$ on a: *Les deux parallèles à la droite (30), issues de l'origine, sont représentées par les équations*

$$\eta_1 = \frac{ab \pm c\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c^2 - b^2} \xi_1.$$

§ 13

Le cercle. — Si $C(\xi_0, \eta_0)$ est le centre et $P(\xi, \eta)$ un point quelconque d'un cercle non-euclidien, la condition que la distance CP soit constamment égale au rayon r est exprimée par l'équation

$$(33) \quad \frac{1 + \xi_0\xi + \eta_0\eta}{\sqrt{1 + \xi_0^2 + \eta_0^2} \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} = \cos r \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(33') \quad \frac{1 - \xi_0\xi - \eta_0\eta}{\sqrt{1 - \xi_0^2 - \eta_0^2} \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} = \operatorname{ch} r \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Élevons au carré, et posons respectivement

$$(34) \quad (1 + \xi_0^2 + \eta_0^2) \cos^2 r = k^2$$

$$(34') \quad (1 - \xi_0^2 - \eta_0^2) \operatorname{ch}^2 r = k^2.$$

On trouve ainsi que l'équation du cercle de centre (ξ_0, η_0) et de rayon r peut être mise sous la forme

$$(35) \quad (\xi_0^2 - k^2) \xi^2 + 2\xi_0\eta_0\xi\eta + (\eta_0^2 - k^2) \eta^2 + 2\xi_0\xi + 2\eta_0\eta + (1 - k^2) = 0 \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(35') \quad (\xi_0^2 + k^2) \xi^2 + 2\xi_0 \gamma_0 \xi \gamma_1 + (\gamma_0^2 + k^2) \gamma_1^2 - 2\xi_0 \xi - 2\gamma_0 \gamma_1 + (1 - k^2) = 0 \quad (\text{dans le p. I}).$$

La relation (33) nous apprend que le rayon r est toujours réel et fini, quelle que soit la position du centre $(\xi_0 \gamma_0)$.

D'ici la conclusion que *les cercles riemanniens sont des lignes de même nature.*

Sur le plan lobatschewskien au contraire il y a trois sorte de cercles, correspondant aux trois hypothèses

$$\xi_0^2 + \gamma_0^2 - 1 \leq 0.$$

Le centre est respectivement: A) un point réel à distance fini (*cercle ordinaire*) — B) un point-limite (*horycicle*) — C) un point idéal (*hypercycle*).

Ces considérations démontrent que *sur le plan lobatschewskien l'équation*

$$\xi^2 + \gamma^2 = 1$$

représente le cercle-limite.

Ce cercle partage le plan en deux régions: la *region extérieure* ou *idéale* et la *region intérieure* ou *réelle*.

Une droite du plan est réelle ou idéale suivant qu'elle coupe le cercle-limite en deux points réels ou imaginaires. Les droites-limites du plan enveloppent le cercle-limite.

§ 14

Ligne équidistante d'une droite. — Si l'on réduit les équations (24), (24'), où l'on suppose δ constant, à la forme rationnelle, on trouve que *sur les plans non-euclidiens l'équidistante d'une droite est une ligne du deuxième ordre définie par l'une des équations*

$$(36) \quad (a\xi + b\gamma + c)^2 = \sin^2 \delta (a^2 + b^2 + c^2) (1 + \xi^2 + \gamma^2)$$

$$(36') \quad (a\xi + b\gamma + c)^2 = \operatorname{sh}^2 \delta (a^2 + b^2 - c^2) (1 - \xi^2 - \gamma^2).$$

Cette ligne est évidemment une trajectoire orthogonale d'un faisceau de rayons, dont le centre est le pôle (réel dans le plan riemannien, idéal dans le plan lobatschewskien) de la droite primitive.

Autrement dit, *l'équidistante d'une droite est un cercle ordinaire*

ou un hypercycle, suivant que le plan est riemannien ou lobatschewskien.

Cette propriété est confirmée par l'autre que l'équidistante d'une droite est une ligne à courbure constante (§ 33).

Les équations (36), (36'), quand on y suppose $a = c = 0$, démontrent que l'hypercycle ⁽¹⁾ d'hauteur δ dont l'axe coïncide avec l'axe Ox , est représenté par l'équation

$$(37) \quad \tau_1^2 - \xi^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \delta = \operatorname{tg}^2 \delta \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(37') \quad \tau_1^2 + \xi^2 \cdot \operatorname{th}^2 \delta = \operatorname{th}^2 \delta \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Autre méthode. — En employant les coordonnées $\left\{ \begin{array}{l} \text{normales} \\ \text{géographiques} \end{array} \right.$ p, q l'hypercycle d'hauteur δ ayant pour axe l'axe Ox est représenté par l'équation $\left\{ \begin{array}{l} q = \delta \\ v = \delta \end{array} \right.$.

Cela posé, il suffit de rappeler les relations liant les coordonnées (p, q) , (u, v) , (ξ, τ_1) aux coordonnées cartésiennes (x, y) (§§ 2, 3, 4), pour avoir aussitôt les équations (37), (37').

§ 15

Représentation des plans non-euclidiens sur le plan euclidien. — On demande de représenter les plans non-euclidiens sur le plan euclidien, sous la condition de la conservation des droites.

A cet effet, après d'avoir établi sur le plan euclidien le système d'axes cartésiens orthogonaux $\Omega(\xi, \tau_1)$, en correspondance au système d'axes $O(x, y)$ du plan non-euclidien, il est évident, en vertu de ce que l'on vient de démontrer au § 5, que la représentation cherchée est définie, dans le cas le plus général, par des relations linéaires entre les variables (ξ, τ_1) et $(\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y)$ ou $(\operatorname{th} x, \operatorname{th} y)$, suivant qu'il s'agit d'un plan riemannien ou lobatschewskien.

Nous écrivons ces relations sous la forme la plus élémentaire

$$(38) \quad \xi = \operatorname{tg} x, \quad \tau_1 = \operatorname{tg} y$$

$$(38') \quad \xi = \operatorname{th} x, \quad \tau_1 = \operatorname{th} y,$$

⁽¹⁾ Cette dénomination concise est conservée aussi dans le plan riemannien, bien qu'elle soit impropre.

en y ajoutant les autres

$$(39) \quad \rho = \operatorname{tg} R$$

$$(39') \quad \rho = \operatorname{th} R$$

qui lient entre eux les rayons vecteur correspondants ρ, R .

Les relations (38), (38') nous apprennent que *les axes coordonnées du plan euclidien et des plans non-euclidiens, sont des droites correspondantes, de sorte que les traces de deux droites correspondantes sur les axes coordonnées homonymes, sont des points correspondants.*

En particulier à l'origine du système d'axes $O(x, y)$ correspond l'origine de l'autre système $\Omega(\xi, \eta)$.

Il résulte aussi des relations (39), (39') que *la représentation conserve les cercles dont le centre est à l'origine.*

Avec plus de généralité, une relation linéaire quelconque entre ξ, η représente indifféremment une ligne plane non-euclidienne et son image sur le plan euclidien. — Dans le premier cas les variables ξ, η sont liées aux coordonnées cartésiennes x, y , par les relations (§ 4)

$$\xi = \begin{cases} \operatorname{tg} x \\ \operatorname{th} x \end{cases}, \quad \eta = \begin{cases} \operatorname{tg} y \\ \operatorname{th} y \end{cases};$$

dans le deuxième cas elles sont les coordonnées cartésiennes ordinaires.

Ces considérations appliquées aux équations (37), (37') démontrent que *la ligne équidistante d'une droite* $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannienne} \\ \text{lobatschewskienne} \end{array} \right\}$ *a pour image euclidienne une* $\left\{ \begin{array}{l} \text{hyperbole} \\ \text{ellipse} \end{array} \right\}$.

Comme $\operatorname{tg} R$ peut prendre toute valeur possible, tandis que $\operatorname{th} R$ peut varier seulement entre 0 et ± 1 , on déduit des équations (38), (38'):

I. L'image du plan riemannien envahit tout le plan euclidien jusqu'à l'infini.

II. L'image de la partie réelle du plan lobatschewskien est comprise à l'intérieur d'un cercle Γ_1 de rayon 1 ayant le centre à l'origine.

Le cercle Γ_1 est l'image du cercle-limite Γ , et la région du plan euclidien extérieure à Γ_1 est l'image de la région idéale du plan lobatschewskien.

Deux droites parallèles ont pour image deux droites qui se coupent sur le cercle Γ_1 , et vice versa,

Deux droites perpendiculaires à une droite réelle ont pour image deux droites qui se coupent à l'extérieur du cercle Γ_1 .

Une suite de points en ligne droite, ou de droites issues d'un point fixe, ont pour images des figures de même nature.

Si une droite r d'un plan non-euclidien coupe une courbe C aux points A, A', A'', \dots l'image de la droite coupe l'image de la courbe aux points A_1, A'_1, A''_1, \dots qui sont les images des points d'intersection. — En particulier si une droite non-euclidienne est tangente à une courbe, l'image de la droite est tangente à l'image de la courbe, et les points de contact sont correspondants.

Ces principes généraux suffisent à eux-seuls pour déduire tout de suite une foule de résultats intéressants. Ainsi par exemple *si deux triangles non-euclidiens ont les sommets correspondants sur trois droites d'un faisceau, les trois couples de côtés correspondants se coupent en trois points d'une droite; et vice versa.*

Ces théorèmes, convenablement généralisés suivant le procédé ordinaire de la géométrie euclidienne, amènent à la construction graphique des figures homologues, etc.

L'ordre et la classe d'une ligne plane non-euclidienne sont égaux respectivement à l'ordre et à la classe de son image sur le plan euclidien. — En particulier *sur les plans non-euclidiens les lieux du deuxième ordre sont aussi des enveloppes de la deuxième classe; et vice versa.*

Ces lignes sont les *coniques* non-euclidiennes, caractérisées (ainsi que les coniques ordinaires) par les théorèmes corrélatifs de PASCAL et de BRIANCHON, etc.

§ 16

Les équations linéaires

$$(40) \quad a\xi + b\eta + c = 0, \quad a'\xi + b'\eta + c' = 0,$$

où a, b, c, a', b', c' sont des constantes, représentent à la fois deux droites non-euclidiennes r, r' et leurs images r_1, r'_1 sur le plan euclidien. — En supposant que le plan soit riemannien, on a (§ 8)

$$(41) \quad \operatorname{tg}(rr') = \frac{\sqrt{(ab' - a'b)^2 + (ac' - a'c)^2 + (bc' - b'c)^2}}{aa' + bb' + cc'}.$$

D'ailleurs on sait de la géométrie analytique ordinaire que

$$(42) \quad \operatorname{tg}(r_1r'_1) = \frac{ab' - a'b}{aa' + bb'}.$$

En excluant le cas que les droites soient orthogonales, pour l'identification des deux expressions (41), (42) on doit avoir en premier lieu $cc' = 0$, et conséquemment $c = 0$ ou bien $c' = 0$.

En supposant par exemple $c' = 0$, c'est-à-dire que la droite r' passe à l'origine, l'expression (41) revient à l'autre

$$\operatorname{tg} rr' = \frac{\sqrt{(ab' - a'b)^2 + a'^2 c^2 + b'^2 c^2}}{aa' + bb'}.$$

de sorte que la condition d'identité entre $\operatorname{tg}(rr')$ et $\operatorname{tg}(r_1 r'_1)$ se réduit à

$$c^2 (a'^2 + b'^2) = 0.$$

Cette équation se dédouble en les deux autres

$$c = 0, \quad a'^2 + b'^2 = 0,$$

Mais la deuxième condition ne peut pas être vérifiée, car elle entraîne les autres conditions

$$a' = 0, \quad b' = 0,$$

qui ne peuvent nullement avoir lieu, car dans ce cas la deuxième équation (40) reviendrait à une identité. — Il reste donc seulement la condition $c = 0$, exprimant que la droite r passe aussi à l'origine.

Si deux droites orthogonales ont pour image deux droites aussi orthogonales, on a en vertu des relations (41), (42):

$$aa' + bb' + cc' = 0, \quad aa' + bb' = 0.$$

Pour que ces conditions coexistent, on doit avoir $cc' = 0$, c'est-à-dire $c = 0$ ou bien $c' = 0$.

Et comme ces résultats restent inaltérés même quand il s'agit du plan lobatschewskien, on conclut que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'angle de deux droites non-euclidiennes soit égal à l'angle de leurs images est: 1°) que les droites données passent toutes les deux par l'origine, si elles sont obliques — 2°) que l'une au moins de ces droites passe par l'origine, si elles sont perpendiculaires.*

Applications — 1° Si une ligne non-euclidienne est définie par une équation en coordonnées polaires (R, ω) l'origine étant le pôle et l'axe Ox l'axe polaire, on obtient l'équation polaire de l'image euclidienne en remplaçant R (dans l'équation de la ligne

donnée) par arc $\text{tag } R$ ou par 2 secteur ($\text{th } R$), suivant que le plan est riemannien ou lobatschewskien.

2° La figure formée par un triangle quelconque ayant un sommet à l'origine et par les trois hauteurs, a pour image euclidienne une figure de même nature. — Il s'ensuit que *les trois hauteurs d'un triangle non-euclidien passent par même point*, etc.

§ 17

A étant un point et r une droite d'un plan non-euclidien, et A_1, r_1 leurs images euclidiennes, menons les droites OM, AP perpendiculaires à r et OH perpendiculaire à la droite AM. — Si sur le plan euclidien on fait des constructions analogues, les droites $\Omega M_1, \Omega H_1$ que l'on obtient sont respectivement les images de OM, OH (§ 16). — Or si le plan donné est riemannien, on a

$$\frac{\sin AO}{\sin AP} = \frac{\text{tg}(\widehat{OMA})}{\sin(\widehat{MOA})};$$

et comme d'ailleurs dans le plan euclidien

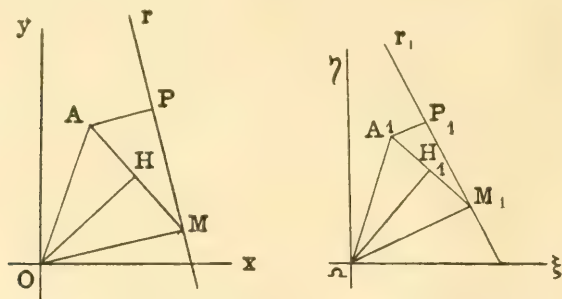


Fig. 9

$$\frac{A_1\Omega}{A_1P_1} = \frac{\text{tg}(\widehat{\Omega M_1 A_1})}{\sin(\widehat{M_1 \Omega A_1})} = \frac{\text{tg}(\widehat{\Omega M_1 A_1})}{\sin(\widehat{MOA})},$$

il résulte

$$\frac{\sin AO}{\sin AP} : \frac{A_1\Omega}{A_1P_1} = \frac{\text{tg}(\widehat{OMH})}{\text{tg}(\widehat{\Omega M_1 H_1})} = \frac{\text{tg}(\widehat{OMH})}{\cot(\widehat{M_1 \Omega H_1})} = \text{tg}(\widehat{OMH}) \cdot \text{tg}(\widehat{MOH}),$$

c'est-à-dire en ayant recours au triangle rectangle OMH

$$(43) \quad \frac{\sin AO}{\sin AP} : \frac{A_1 \Omega}{A_1 P_1} = \frac{1}{\cos OM} = \text{constante} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(43') \quad \frac{\text{sh } AO}{\text{sh } AP} : \frac{A_1 \Omega}{A_1 P_1} = \frac{1}{\text{ch } OM} = \text{constante} \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Cela démontre que dans le plan $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannien} \\ \text{circulaires} \\ \text{hyperboliques} \end{array} \right\}$ le rapport des sinus des distances d'un point A à l'origine et à une droite fixe r, est égal au rapport des distances de son image A₁ à l'origine Ω et à la droite r₁ image de r, multiplié par un facteur tout à fait indépendant de la position du point A.

§ 18

Voici une interprétation géométrique remarquable des formules que l'on vient de démontrer.

Si A est un point d'une conique non-euclidienne K, dont le point O est l'un des foyers et la droite r la directrice correspondante, le rapport

$$\frac{\sin AO}{\sin AP} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{sh } AO}{\text{sh } AP}$$

est constant quelle que soit la position du point A sur la conique K.

On déduit alors de la relation (43), ou (43'), que le rapport

$\frac{A_1 \Omega}{A_1 P_1}$ est aussi constant, ce qui démontre que sur le plan euclidien de représentation le point Ω est un foyer de la conique K₁ image de K, et la droite r₁ la directrice correspondante.

Or comme ce raisonnement peut être inversé, on a la propriété remarquable: Si une conique non-euclidienne a l'un de ses foyers à l'origine des axes, son image euclidienne est une conique, ayant pour foyer et pour directrice les images du foyer et de la directrice de la conique donnée; et réciproquement.

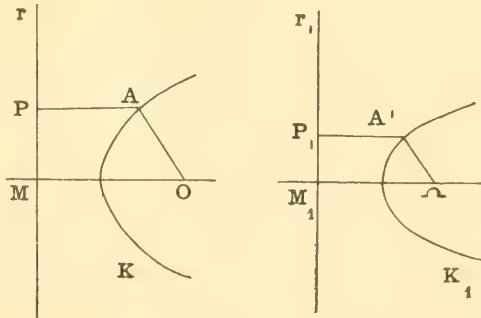


Fig. 10

A l'aide de ce théorème toute propriété relative aux foyers et aux directrices d'une conique euclidienne, donne naissance à une autre propriété semblable relative aux foyers et aux directrices d'une conique non-euclidienne.

Ainsi, par exemple, en rappelant ce qu'il a lieu pour les coniques ordinaires, on a qu'une conique non-euclidienne, rapportée à l'un de ses foyers, est représentée par l'équation polaire

$$\frac{\operatorname{tg} R}{\operatorname{th} R} = \frac{p}{1 - e \cos \omega} = m\xi + n\eta + p,$$

e, m, n, p étant des constantes.

Reciproquement toute équation polaire affectant l'une de ces formes, représente une conique non-euclidienne ayant l'origine pour foyer et la droite

$$m\xi + n\eta + p = 0$$

pour directrice correspondante.

§ 19

Sur les rayons vecteurs $OA = R$ joignant le pôle O aux points successifs d'une ligne plane riemannienne L , prenons d'autres rayons vecteurs $OA' = R'$ tels qu'il soit toujours

$$R + R' = \frac{\pi}{2},$$

et soit L' le lieu des extrémités des vecteurs R' .

Si l'on fait la représentation du plan riemannien sur le plan euclidien, les rayons vecteurs R_1, R'_1 des lignes L_1, L'_1 images des lignes données L, L' , vérifient la relation

$$R_1 R'_1 = \operatorname{tg} R \cdot \operatorname{tg} R' = \operatorname{tg} R \cdot \cot R = 1.$$

Cela démontre que deux lignes à rayons vecteurs complémentaires décrites sur le plan riemannien, ont pour images euclidiennes deux lignes inverses par rapport à un cercle de rayon unitaire; et réciproquement.

§ 20

Rapports anharmoniques. — On appelle rapport anharmonique ou birapport de quatre points A, B, C, D d'une droite eucli-

dienne, riemannienne, lobatschewskienne respectivement la fonction

$$(ABCD) = \begin{cases} \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} \\ \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD} \\ \frac{\text{sh } AC}{\text{sh } BC} : \frac{\text{sh } AD}{\text{sh } BD} \end{cases}.$$

On appelle *rapport anharmonique* ou *birapport* de quatre rayons d'un faisceau, la fonction

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

quelle que soit la nature du plan contenant la figure.

Théorème. — *Le rapport anharmonique de quatre points d'une droite est égal au rapport anharmonique des quatre rayons projetant du centre P les quatre points A, B, C, D de la droite r, les triangles PAC, PBC, PAD, PBD, dans l'hypothèse du plan riemannien, donnent les relations*

$$\begin{aligned} \frac{\sin(ac)}{\sin AC} &= \frac{\sin \hat{A}}{\sin PC}, \\ \frac{\sin(bc)}{\sin BC} &= \frac{\sin(\hat{P}BC)}{\sin PC}, \\ \frac{\sin(ad)}{\sin AD} &= \frac{\sin \hat{A}}{\sin PD}, \\ \frac{\sin(bd)}{\sin BD} &= \frac{\sin(\hat{P}BD)}{\sin PD}, \end{aligned}$$

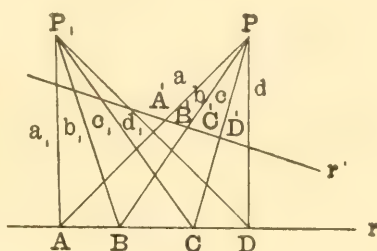


Fig. 11

d'où il suit par division

$$\frac{\sin(ac)}{\sin AC} : \frac{\sin(bc)}{\sin BC} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin(\hat{P}BC)}, \quad \frac{\sin(ad)}{\sin AD} : \frac{\sin(bd)}{\sin BD} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin(\hat{P}BD)}$$

et enfin :

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD}, \quad (abcd) = (ABCD).$$

Démonstration analogue dans le plan lobatschewskien.

Corollaires. — 1° *Quatre rayons a, b, c, d d'un faisceau sont coupés par deux transversales r, r' en deux groupes de quatre points A, B, C, D, et A', B', C', D' ayant même rapport anharmonique.*

En effet

$$(ABCD) = (abcd), \quad (A'B'C'D') = (abcd),$$

et conséquemment $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

2° *Quatre points A, B, C, D d'une droite sont projetés de deux centres P, P' par deux groupes de quatre rayons a, b, c, d et a', b', c', d' ayant même rapport anharmonique.*

En effet

$$(abcd) = (ABCD), \quad (a'b'c'd') = (ABCD),$$

d'où il suit

$$(abcd) = (a'b'c'd').$$

Autrement dit, le rapport anharmonique de quatre éléments (points ou rayons) n'est pas altéré ni par une projection ni par une section.

Théorème. — La transformation définie par les relations (38), (38') conserve le rapport anharmonique de quatre points quelconques d'une droite, et de quatre rayons quelconques d'une faisceau.

1° Si les points donnés A, B, C, D sont sur l'axe O α , et conséquemment leurs images A₁, B₁, C₁, D₁ sur l'axe $\Omega\Omega_1$, on a

$$\Omega A_1 = \text{tg } OA, \quad \Omega B_1 = \text{tg } OB, \quad \Omega C_1 = \text{tg } OC, \quad \Omega D_1 = \text{tg } OD.$$

Il résulte d'ici :

$$\begin{aligned} (A_1 B_1 C_1 D_1) &= \frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 D_1}{B_1 D_1} = \frac{\Omega C_1 - \Omega A_1}{\Omega C_1 - \Omega B_1} : \frac{\Omega D_1 - \Omega A_1}{\Omega D_1 - \Omega B_1} \\ &= \frac{\text{tg } OC - \text{tg } OA}{\text{tg } OC - \text{tg } OB} : \frac{\text{tg } OD - \text{tg } OA}{\text{tg } OD - \text{tg } OB} \\ &= \frac{(\sin OC \cdot \cos OA - \cos OC \cdot \sin OA) \cos OB}{(\sin OC \cdot \cos OB - \cos OC \cdot \sin OB) \cos OA} : \\ &\quad \frac{(\sin OD \cdot \cos OA - \cos OD \cdot \sin OA) \cos OB}{(\sin OD \cdot \cos OB - \cos OD \cdot \sin OB) \cos OA} \\ &= \frac{\sin(OC - OA)}{\sin(OC - OB)} : \frac{\sin(OD - OA)}{\sin(OD - OB)} = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD} = (ABCD). \end{aligned}$$

2° Les points donnés A, B, C, D soient sur une droite quelconque r , et conséquemment leurs images A_1, B_1, C_1, D_1 sur l'image r_1 de r .

Si de deux points correspondants P, P_1 on projette les points $(A, B, C, D), (A_1, B_1, C_1, D_1)$ respectivement en $(A', B', C', D'), (A'_1, B'_1, C'_1, D'_1)$ sur les axes $Ox, \Omega\xi$, on a

$$(ABCD) = (A'B'C'D'), \quad (A_1B_1C_1D_1) = (A'_1B'_1C'_1D'_1),$$

et comme

$$(A'B'C'D') = (A'_1B'_1C'_1D'_1),$$

il résulte aussi

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1).$$

S'il s'agit de deux faisceaux P, P_1 de quatre rayons $(a, b, c, d), (a_1, b_1, c_1, d_1)$, en les coupant par deux droites correspondantes r, r_1 , on obtient les groupes de quatre points correspondantes A, B, C, D et A_1, B_1, C_1, D_1 . Or on a, en vertu des théorèmes précédents

$$(abcd) = (ABCD), \quad (a_1b_1c_1d_1) = (A_1B_1C_1D_1),$$

et puisque $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$, il résulte aussi $(abcd) = (a_1b_1c_1d_1)$.

Démonstrations analogues dans le plan lobatschewskien.

§ 21

Les conséquences que l'on peut tirer de ces principes sont innombrables. — Voici les principales :

1. — *Deux formes projectives ont pour images deux formes aussi projectives.*

2. — *En particulier un groupe harmonique de points ou de rayons a pour image un autre groupe harmonique.*

3. — *Pour que deux formes géométriques soient projectives, il est nécessaire et suffisant que les groupes formés par quatre couples d'éléments correspondants quelconques, aient même rapport anharmonique.*

4. — *Deux formes superposées en involution ont pour images deux formes superposées aussi en involution.*

Sur l'axe coordonné $\Omega\xi$ du plan euclidien de représentation considérons une involution de points ayant le point central à l'origine Ω , ce qui dans la question actuelle ne nuit nullement à la généralité. Or si A_1, A'_1 est une couple de points conju-

gués, on a la relation

$$\Omega A_1 . \Omega A'_1 = \pm k^2 ,$$

k étant une constante. — Cette égalité, transformée à l'aide des relations (38), (38'), donne le théorème :

Sur les plans non-euclidiens une involution de points est constituée par les couples de points (A_i, A'_i) dont les distances OA_i, OA'_i à un point fixe O vérifient la relation

$$\text{tg } OA_i . \text{tg } OA'_i = \text{constante} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$\text{th } OA_i . \text{th } OA'_i = \text{constante} \quad (\text{dans le p. l.}).$$

En appelant O le *point central* de l'involution, on peut compléter la propriété ci-dessus, en disant :

La transformation définie par les relations (38), (38') réduit le point central de toute involution de points, au point central de l'image.

5. — La relation segmentaire connue, relative à six points d'une droite euclidienne faisant partie d'une même involution, est remplacée sur les plans non-euclidiens par d'autres relations segmentaires d'une forme analogue.

6. — Pour le quadrangle et le quadrilatère complets non-euclidiens, subsistent les propriétés projectives connues.

7. — Pour les coniques non-euclidiennes subsistent le théorème de DESARGUES, les propriétés fondamentales des pôles et des polaires, les propriétés projectives des foyers et des directrices, la génération projective des coniques, etc.

Bref on peut construire sans peine toute la géométrie projective des plans non-euclidiens, géométrie qui (sauf certaines restrictions inévitables) est, dans son allure générale, tout-à fait semblable à la géométrie projective ordinaire.

CHAPITRE III

§ 22

Tangente et normale à une ligne plane. — Comme l'équation générique

$$(1) \quad f(\xi, \eta) = 0$$

représente à la fois une ligne non-euclidienne L et son image Λ sur le plan euclidien, et comme d'ailleurs les tangentes à ces lignes L, Λ en deux points correspondants sont des droites cor-

respondantes (§ 15), on conclut que l'équation

$$(2) \quad H - \eta = \frac{d\eta}{d\xi} (\Xi - \xi)$$

(où H, Ξ désignent les coordonnées courantes) définit la tangente à la courbe (1) au point générique (ξ, η) , pourvu que le coefficient différentiel $\frac{d\eta}{d\xi}$ soit calculé à l'aide de l'équation (1) de la ligne.

La correspondance qui a lieu entre les tangentes des lignes L, Λ démontre que les considérations que l'on fait d'ordinaire pour la tangente d'une ligne plane euclidienne, telles que l'existence ou la non-existence, l'unicité ou la multiplicité et autres particularités de cette droite-limite, peuvent être étendues à une ligne non-euclidienne.

Écrivons l'équation (2) sous la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} \Xi - H + \eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

et appliquons ensuite la condition d'orthogonalité de deux droites (§ 8). On trouve ainsi que la normale à la ligne (1) au point générique (ξ, η) , est définie par l'équation

$$(3) \quad H - \eta = \frac{\xi\eta \cdot \frac{d\eta}{d\xi} - (1 + \eta^2)}{(1 + \xi^2) \frac{d\eta}{d\xi} - \xi\eta} (\Xi - \xi) \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(3') \quad H - \eta = - \frac{\xi\eta \cdot \frac{d\eta}{d\xi} + (1 - \eta^2)}{(1 - \xi^2) \frac{d\eta}{d\xi} + \xi\eta} (\Xi - \xi) \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Application. — La tangente au point générique $\Lambda(\xi, \eta)$ d'un hypercycle lobatschewskien [§ 14, formule (37')] a pour équation

$$H - \eta = - \operatorname{th} \vartheta \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} (\Xi - \xi).$$

Cette droite coupe l'axe Ox au point A_0 d'abscisse

$$\Xi_0 = \frac{\operatorname{th} \vartheta \cdot \xi^2 + \eta \sqrt{1 - \xi^2}}{\operatorname{th} \vartheta \cdot \xi},$$

..

et d'ailleurs les coordonnées ξ, η , vérifient l'équation de l'hypercycle. En appelant donc Δ la distance entre les points A, A₀, on a (§ 4)

$$\operatorname{ch} \Delta = 0, \quad \text{d'où il suit} \quad \Delta = \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}.$$

Un calcul analogue effectué en partant de l'équation (37) du § 14, porte à la relation

$$\Delta = \frac{\pi}{2},$$

ce qui démontre que l'hypercycle constitue un cas particulier de la tractrice (courbe aux tangentes constantes).

§ 23

Arc élémentaires. — Remarquons d'abord qu'une expression de la forme

$$\frac{dt^2}{A + Bdt + Cdt^2}$$

A, B, C étant des quantités finies, diffère de l'autre

$$\frac{dt^2}{A}$$

par des infiniment petits d'ordre supérieur.

Cela posé si l'on signe sur la courbe donné deux points infiniment rapprochés A (ξ, η), B ($\xi + d\xi, \eta + d\eta$), comme l'arc infiniment petit $ds = AB$ peut être remplacé soit par $\sin AB$, soit par $\operatorname{sh} AB$, on peut employer, dans le calcul de ds , les formules (4), (4') du § 4.

On trouve alors, en appliquant le lemme précédent

$$(4) \quad ds = \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + (\eta d\xi - \xi d\eta)^2}}{1 + \xi^2 + \eta^2} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(4') \quad ds = \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 - (\eta d\xi - \xi d\eta)^2}}{1 - \xi^2 - \eta^2} \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Ces formules gardent évidemment même forme, quelle que soit la variable indépendante.

Coordonnées polaires. — Considérons d'abord l'arc circulaire $AM = d\sigma$ de centre O, de rayon $OA = R$ et correspondant à l'angle au centre $\widehat{AOM} = d\omega$.

Si AC est la tangente au cercle en OAC donne une des relations

$$\sin AC = \sin R \cdot \sin (d\omega),$$

$$\text{sh } AC = \text{sh } R \cdot \sin (d\omega).$$

Mais comme, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, on peut prendre

$$\sin AC = \sin AM = AM = d\sigma,$$

$$\text{sh } AC = \text{sh } AM = AM = d\sigma,$$

$$\sin (d\omega) = d\omega,$$

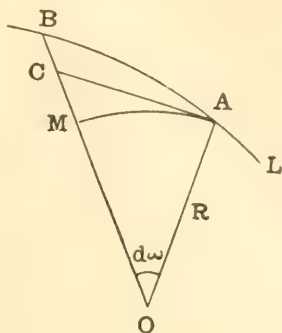


Fig. 12

il résulte enfin

$$(5) \quad d\sigma = \begin{cases} \sin R \cdot d\omega \\ \text{sh } R \cdot d\omega. \end{cases}$$

Cela posé, si l'on décrit une ligne arbitraire L passant par A et coupant OC en B, le triangle rectangle infiniment petit AMB donne pour expression de l'arc élémentaire AB :

$$(6) \quad ds = \sqrt{dR^2 + \sin^2 R \cdot d\omega^2} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(6') \quad ds = \sqrt{dR^2 + \text{sh}^2 R \cdot d\omega^2} \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Les formules (4), (4') peuvent se dériver des relations (5), (5'). On a en effet

$$\text{tg } R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2};$$

et d'ailleurs si (α, β) , (α_1, β_1) sont les angles que les rayons vecteurs OA, OB font avec les axes, on trouve par l'application du lemme précédent

$$\cos \alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}};$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{\xi + d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \cos \beta_1 = \frac{\eta + d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

et conséquemment

$$\cos (d\omega) = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \xi d\xi + \eta d\eta}{\xi^2 - \eta^2}, \quad \sin (d\omega) = d\omega = \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

En éliminant R et $d\omega$ entre ces équations et la (5), on tombe sur la formule (4).

Coordonnées géographiques. — Si des points consécutifs $A(u, v)$, $B(u + du, v + dv)$ on abaisse les perpendiculaires AC , BD à l'axe Ox , et du point A la perpendiculaire AN à BD , on construit le quadrilatère trirectangle $CDNA$ qui, dans l'hypothèse du plan riemannien, donne la relation (§ 3)

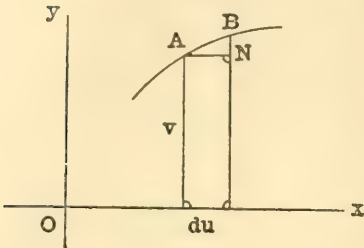


Fig. 13

$$\frac{\sin AN}{\sin CD} = \cos AC = \cos v,$$

c'est à-dire (en remarquant que AN et $CD = du$ sont des infiniment petits)

$$(7) \quad AN = \cos v \cdot du.$$

Cela posé, si l'on a recours au triangle rectangle ANB , et que l'on opère d'une façon analogue dans le plan lobatschewskien, on trouve les expressions:

$$(8) \quad ds = \sqrt{\cos^2 v \, du^2 + dv^2} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(8') \quad ds = \sqrt{\operatorname{ch}^2 v \, du^2 + dv^2} \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Celles-ci, transformées à l'aide des relations qui ont lieu entre les coordonnées u, v et

$$\xi = \begin{cases} \operatorname{tg} x \\ \operatorname{th} x \end{cases}, \quad \eta = \begin{cases} \operatorname{tg} y \\ \operatorname{th} y \end{cases}$$

(§ 3), reviennent aux formules (4), (4').

Remarque. — Les équations $\left\{ \begin{matrix} (4), (6), (8) \\ (4'), (6'), (8') \end{matrix} \right\}$ expriment l'élément linéaire du plan $\left\{ \begin{matrix} \text{riemannien} \\ \text{lobatschewskien} \end{matrix} \right\}$, pourvu que les variables paraissant dans ces formules soient considérées comme des variables indépendantes entre elles.

§ 24

Applications. — 1° Si R est constant, les équations (5), (5'),

intégrées entre les limites $\omega = 0$ et $\omega = \theta$, donnent

$$(9) \quad s = \begin{cases} \theta \cdot \sin R \\ \theta \cdot \operatorname{sh} R \end{cases}.$$

Telle est la longueur de l'arc circulaire (riemannien ou lobatschewskien) de rayon R , correspondant à l'angle au centre θ .

Pour $\theta = 2\pi$, les formules (9) donnent la longueur des cercles non-euclidiens.

En particulier (§ 9) *la droite riemannienne est une ligne fermée, ayant la longueur constante 2π .*

2° Dans l'équation (7) et dans son analogue du plan lobatschewskien, on peut remplacer AN par l'arc AB de la ligne, la différence entre ces lignes étant un infiniment petit d'ordre supérieur. On conclut alors qu'un arc quelconque d'hypercycle $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannien} \\ \text{lobatschewskien} \end{array} \right\}$ est égal à sa projection sur l'axe, multipliée par le cosinus $\left\{ \begin{array}{l} \text{circulaire} \\ \text{hyperbolique} \end{array} \right\}$ de l'hauteur.

3° Si l'on suppose $s = mu$, avec m constante, on trouve par l'application des relations (8), (8')

$$du = \begin{cases} \frac{dv}{\sqrt{m^2 - \cos^2 v}} \\ \frac{dv}{\sqrt{m^2 - \operatorname{ch}^2 v}} \end{cases}.$$

Cela démontre que *la ligne non-euclidienne dont un arc quelconque a un rapport constant m avec sa projection sur une droite (axe des x) est définie (en coordonnées géographiques) par une des équations*

$$(10) \quad u + c = \int \frac{dv}{\sqrt{m^2 - \cos^2 v}}$$

$$(10') \quad u + c = \int \frac{dv}{\sqrt{m^2 - \operatorname{ch}^2 v}}.$$

c étant une constante arbitraire.

La seule condition restrictive à laquelle la constante m doit satisfaire, est $m > 1$ dans le plan lobatschewskien.

La quadrature indiquée dans l'équation (10), dans le cas $m \geq 1$, conduit évidemment aux fonctions elliptiques. — Dans le

cas $m = 1$ on obtient l'équation très simple

$$(11) \quad \operatorname{tg} v = -\frac{1}{\operatorname{sh}(u+c)},$$

c'est-à-dire, en coordonnées cartésiennes :

$$(12) \quad \cot y = -\cos x \cdot \operatorname{sh}(x+c).$$

Dans la ligne riemannienne définie par une des équations (11), (12) les problèmes de la division d'un arc quelconque en parties égales, ou plus généralement en parties proportionnelles à des nombres ou à des segments donnés, sont ramenés aux problèmes analogues sur l'axe des x .

4° L'équation de la droite parallèle à l'axe Ox et coupant le segment μ sur l'axe Oy , peut être mise sous la forme (§ 12)

$$(13) \quad \operatorname{th} v = \operatorname{th} \mu \cdot e^{-u}.$$

On obtient d'ici la relation

$$du = -\coth \mu \cdot e^u \frac{dv}{\operatorname{ch}^2 v} = -\frac{dv}{\operatorname{sh} v \cdot \operatorname{ch} v}$$

qui, modifiée à l'aide des équations (8'), (13), donne par intégration

$$s = \pm \log \operatorname{sh} v + c = \pm \log \left(\frac{\operatorname{th} \mu}{\sqrt{e^{2u} - \operatorname{th}^2 \mu}} \right) + c,$$

c étant une constante arbitraire, que l'on doit prendre égale à $\mp \log \operatorname{sh} \mu$, si l'on compte les segments s de la parallèle a à partir de l'axe Oy .

Or si l'on remarque que $v < \mu$, pour faire en sorte que s soit positif il faut prendre, dans les équations ci-dessus, les signes inférieurs. On en conclut que le segment s de la parallèle a , compté à partir de l'axe Oy , est exprimé par une des formules

$$(14) \quad s = \log \left(\frac{\operatorname{sh} \mu}{\operatorname{sh} v} \right) = \log (\operatorname{ch} \mu \sqrt{e^{2u} - \operatorname{th}^2 \mu}).$$

§ 25

Aire d'une surface. — S'il s'agit d'évaluer l'aire des triangles et des polygones plans, il est convenable de prendre pour unité de mesure le triangle où l'excès angulaire (en géométrie rieman-

nienne) et le *défaut angulaire* (en géométrie lobatschewskienne) est un angle droit.

Nous avons dans le premier cas le triangle riemannien *tri-rectangle*, dans le deuxième cas le triangle lobatschewskien où chaque angle est $\frac{1}{3}$ d'un angle droit. — Mais ces unités ne

sont pas employées dans l'évaluation des aires comprises entre une ou plus courbes. C'est donc le cas de les remplacer par d'autres plus convenables, telles par exemple que le quadrilatère trirectangle ayant deux côtés consécutifs égaux à l'unité de longueur, le quadrilatère équiangle dont les côtes sont égaux à l'unité de longueur..... etc.

Mais si l'on veut une analogie plus intime avec ce que l'on a dans la géométrie euclidienne, l'unité d'aire à préférer est le *pseudocarré*, c'est-à-dire le quadrilatère ABCD compris entre un segment rectiligne AB égal à l'unité de longueur, deux autres segments rectilignes AC, BD de longueur unitaire perpendiculaires à AB, et l'arc CD d'hypercycle d'hauteur 1 et d'axe AB (*unité naturelle d'aire*).

Mais dans la suite on exprimera l'aire de toute figure non-euclidienne F en carrés unitaires, comme s'il s'agit d'une figure euclidienne, sauf à employer la relation évidente

$$\text{Aire de F en pseudocarrés} = \frac{\text{Aire de F en carrés unitaires}}{\text{Aire du pseudocarré en carrés unitaires}},$$

si l'on veut l'aire de la figure F en unités naturelles.

§ 26

Aire élémentaire. — Le quadrilatère plan CDC'D' compris entre les perpendiculaires ACC', BDD' à l'axe Ox en deux points consécutifs A, B et les deux hypercycles infiniment rapprochés CD, C'D' ayant l'axe commun Ox, peut être considéré (à cause de ses dimensions infinitésimales) comme un rectangle euclidien. On a donc

$$\text{Aire CDC'D'} = CD \times CC'.$$

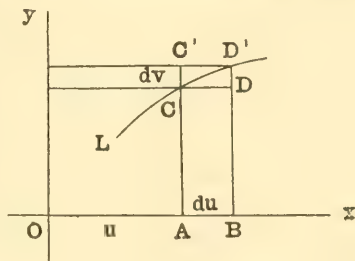


Fig. 14

Or si l'on suppose

$$OA = u, \quad AC = v, \quad OB = u + du, \quad BD' = v + dv,$$

on déduit de l'équation (7) du § 23 :

$$CD = AB \cdot \cos AC = \cos v \cdot du, \quad CC' = dv$$

et conséquemment

$$\text{Aire } CDC'D' = \cos v \cdot dvdu.$$

Et comme l'aire $CDC'D'$ est évidemment la différentielle de l'aire du quadrilatère $ABCD$ correspondante à l'accroissement dv de la coordonnée v , on a la formule

$$(15) \quad \text{Aire } ABCD = \int_0^v \cos v \cdot dvdu = \sin v \cdot du.$$

Celle-ci, dans le plan lobatschewskien, est remplacée par l'autre

$$(15') \quad \text{Aire } ABCD = \int_0^v \text{ch } v \cdot dvdu = \text{sh } v \cdot du.$$

Cela posé, si l'on décrit une ligne arbitraire L passant par les points C, D' , comme la différence entre les aires $ABCD', ABCD$ est un infiniment petit d'ordre supérieur, on a le théorème: *L'aire élémentaire dS comprise entre une ligne plane quelconque, l'axe des x et deux ordonnées infiniment rapprochées, est exprimée (en coordonnées géographiques) par une des formules :*

$$(16) \quad dS = \sin v \cdot du$$

$$(16') \quad dS = \text{sh } v \cdot du.$$

Si l'on veut introduire ici les coordonnées (ξ, η) , il faut avoir recours aux relations (7), (7') du § 3 et (2), (2') du § 4, ce qui donne

$$(17) \quad dS = \frac{\eta d\xi}{(1 + \xi^2) \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}$$

$$(17') \quad dS = \frac{\eta d\xi}{(1 + \xi^2) \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}.$$

En différentiant ces équations, on trouve pour expression de l'aire du quadrilatère ayant pour sommets les points (ξ, η) , $(\xi + d\xi, \eta)$, $(\xi, \eta + d\eta)$, $(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$:

$$d^2S = \begin{cases} \frac{d\xi \cdot d\eta}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\xi \cdot d\eta}{\cos^3 R} \\ \frac{d\xi \cdot d\eta}{(1 - \xi^2 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\xi \cdot d\eta}{\operatorname{ch}^3 R} \end{cases}$$

R étant le rayon vecteur issu de l'origine.

Il s'ensuit que: *L'aire de la partie du plan comprise entre une ligne arbitraire, l'axe des x et deux ordonnées quelconques, est donnée par une des formules*

$$(18) \quad S = \int \frac{\eta \cdot d\xi}{(1 + \xi^2) \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} = \iint \frac{d\xi \cdot d\eta}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ = \iint \frac{d\xi \cdot d\eta}{\cos^3 R} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(18') \quad S = \int \frac{\eta \cdot d\xi}{(1 + \xi^2) \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} = \iint \frac{d\xi \cdot d\eta}{(1 - \xi^2 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ = \iint \frac{d\xi \cdot d\eta}{\operatorname{ch}^3 R} \quad (\text{dans le p. l.})$$

les intégrales étant étendues entre des limites convenables.

(À suivre.)

PRÓDROMO DA FLORA PORTUGUEZA

POR

GONÇALO SAMPAIO

(Continuação do vol. 4.º, pag. 128)

77. DIANTHUS, Lin.

271. **D. monspessulánus**, Lin., Mariz in Bol. Soc. Brot. v, 121. — Norte (desde a margem esquerda do rio Douro a Castro Daire).
272. **D. Brotéri**, Bois. et Reut., Mach. in Cat. met. 32; **D. fimbriatus**, Brot. in Fl. lusit. II, 177; **D. gallicus** β . **lusitanicus** Nym., Mach. in loc. cit. 31. — Littoral do sul.
var. *valentinus* (Willk.); **D. Broteri**, β . **macrophyllus** Willk., Mariz in loc. cit. — Centro.
273. **D. lusitánicus**, Brot. in Fl. lusit. II, 177 et in Phyt. lusit. I, 173, tab. 70; **D. attenuatus**, Lin., non Sm. — Desde o Douro e Traz dos Montes ao Algarve.
274. **D. attenuátus**, Sm. in Act. Soc. Linn. II, 301; J. Henriq. in Bol. Soc. Brot. III, 122.
raç. **beirensis**, Samp.; **Dianthus cintranus**, Bois. et Reut. (nom. err.); Mach. in Cat. met., 30; **D. Toletanus**, Mach. loc. cit., non Bois. et Reut.; **D. atte-**

nuatus var. pyrenaicus. J. Henriq. in loc. cit. — Beiras (desde a Serra da Gralheira á Serra da Estrella).

275. **D. graníticus**, Jord.; Samp. in Revista.

var. *Marizi*, Samp. in An. Sc. Nat. x, 14; *D. pungens*, Mariz in Bol. Soc. Brot. v, 12, non Godr. — Desde Bragança e Montalegre ao Marão.

276. **D. Langeánus**, Willk.; J. Henriq. in Bol. Soc. Brot. III, 47. — Desde Castro Laboreiro e Larouco ao Marão.

277. **D. Planéllae**, Wk., Mariz in Bol. Soc. Brot. v, 119; *D. caespitosifolius*, Plan. in Ens. Fl. Gall., 118. — Na margem do rio Minho, desde Melgaço a Monção.

278. **D. Balbísii**, Ser., Samp. in An. Sc. Nat. x, 12.

var. *algarbiensis* (Mariz) Samp. in loc. cit.; *D. Toletanus* var. *algarviensis*, Mariz in Bol. Soc. Brot. v, 119. — Algarve (entre as Caldas de Monchique e Villa Nova de Portimão).

279. **D. arméria**, Lin., Mariz in Bol. Soc. Brot. VII, 72. — Miranda do Douro (n. v.).

Cultivam-se nos jardins diversas variedades ornamentaes do **D. caryophyllus**, Lin. (*Cravos*), do **D. plumarius**, Lin. (*Patifes*, *Cravos da Escocia*), do **D. barbatus**, Lin. (*Cravinhos da China*) e do **D. sinensis**, Lin. (*Cravinas*, *Cravelinas*, *Mauritanias*, *Cravos de poeta*).

78. TÚNICA, Rupp.

280. **T. prolífera** (Lin.) Scop.; *Dianthus prolifer*, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 176; *Kohlrauschia prolifera*, Kth. — Todo o paiz.

raç. **velutína** (Guss.); *Dianthus velutinus*, Guss., Mach. in Cat. met. 30. — Norte e centro.

79. PETRORRHAGIA, Link.

281. **P. saxífraga** (Lin.) Link.; *Dianthus saxifragus*, Lin.; *D. filiformis*, Cav., Brot. in Fl. lusit. II, 177; *Tunica saxifraga*, Scop. — Douro e Beira.

FAM. XIV — ALSINACEAE, Wahl.

80. HOLÓSTEUM, Dill.

282. **H. umbellátum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 125.
— Traz dos Montes e Alto Douro.

81. MOENCHIA, Ehrh.

283. **M. erécta** (Lin.), Gaert. May et Scherb.; *Sagina erecta*, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 214; *Cerastium erectum*, Coss. et Germ. — Todo o paiz.

raç. **octándra** (Ziz.); *Sagina octandra*, Ziz.; *Moenchia octandra*, Gay. — Alemtejo (Odemira!).

82. CERÁSTIUM, Lin.

284. **C. glomerátum**, Thuil.; *C. viscosum*, Lin. in Sp. pl. edic. 1.^a 226; *C. vulgatum*, Lin. in herb. et in Fl. Suec. edic. 2.^a, 152; *C. vulgatum* β . *viscosum*, Brot. in Fl. lusit. II, 218. — Todo o paiz.

for. *apétalum* (Dum.). — Com o typo, em varias localidades.

285. **C. brachypétalum**, Desp., Mariz in Bol. Soc Brot. V, 95. — Traz dos Montes e Algarve (n. v.).

var. *tauricum* (Spreng.). — Coimbra!

286. **C. triviále**, Link.; *C. vulgatum*, Lin. in Sp. pl. edic. 2.^a, 269, non in Fl. Suec. nec herb., Brot. in Fl. lusit. II, 218 p. p. — Quasi todo o paiz.

287. **C. púmilm**, Curt., J. Henriq. in Exp. scient. 113; *C. glutinosum*, Fries., Mach. in Cat. met. 101. — Norte e centro.

raç. **tetrándrum** (Curt.); *Cerastium tetrandrum*, Curt., Samp. in An. Sc. Nat. VI, 70. — Norte, nos areaes maritimos.

var. *crassifolium*, Merino in Fl. Gall. I, 243. — De Caminha a Villa do Conde.

288. **C. semidecándrum**, Lin.; *C. varians*, Coss. et Germ. var. *fallax*, Samp. in An. Sc. Nat. ^{VII}, non Guss. — Traz dos Montes e margens do rio Douro.
289. **C. Riaei**, Desm., J. Henriq. in Exp. scient. 113. — Serra da Estrella, na região alta.

83. MALÁCHIA, Fries.

290. **M. aquática** (Lin.) Fries.; *Cerastium aquaticum*, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 219; *Stellaria aquatica*, Scop.; *Malachium aquaticum*, Reich. — Desde o Minho a Coimbra (aqui e ali).

84. STELLÁRIA, Lin.

291. **S. média** (Lin.) Cyr.; *Alsine media*, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 476. — Todo o paiz. Vulg. *Morugem*.
 var. *neglecta* (Weihe). — Varias localidades, de norte a sul.
 var. *apétala* (Ucria). — Varias localidades, de norte a sul.
292. **S. holóstea**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 195. — Norte e centro do paiz.
293. **S. gramínea**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 195. — Norte e centro do paiz.
294. **S. uliginósa**, Murr., Brot. in Fl. lusit. II, 196. — Desde norte a sul do paiz.
 var. *apétala* (Reich.) — Norte, em varias localidades.

85. ARENÁRIA, Lin.

295. **A. serpyllifolia**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 200. — Norte e centro do paiz.
 raç. *ténulor* (Mert. et Koch.) — Norte e centro do paiz.
296. **A. conimbricénsis**, Brot. in Phyt. lusit. fasc. 1.º

(ediç. an. 1800) pag. 65, in Fl. lusit. II, 200 et in Phyt. lusit. I, 179 tab. 73. — De Aveiro para o sul.

raç. **littórea**, Samp. in Bol. Soc. Brot. XXIV. — Beira-mar.

297. **A. emargináta**, Brot. in Fl. lusit. II, 202. — Alemtejo e Algarve.

298. **A. algarbiénsis**, Welw.; Willk. in Icon. 93. — Baixo Alemtejo e Algarve (n. v.).

299. **A. montána**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 199. — Quasi todo o paiz.

300. **A. aggregáta** (Lin.) Lois.; Gysophila aggregata, Lin.; Arenaria tetraquetra, Brot. in Fl. lusit. II, 200, Lin. in Mant. p. p. non in Spec.; Arenaria capitata, Lamk. — Norte e centro (montanhas elevadas).

301. **A. trinérvia**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 198, p. p.; Moehringia trinervia, Clair. — Norte do paiz.

302. **A. pentándra** (Gay) Ard.; Moehringia pentandra, Gay, Mariz in Bol. Soc. Brot. V, 91. — Centro e sul.

86. HONCKÉNYA, Ehrh.

303. **H. peploides** (Lin.), Ehrh.; Arenaria peploides, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 198. — Norte e centro (areaes maritimos).

87. ALSÍNE, Tour.

304. **A. tenuifólia** (Lin.) Crtz.; Arenaria tenuifolia, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 202. — Norte do paiz.

for. *viscidula* (Thuil.); Alsine tenuifolia β . hybrida (Jord.), Mariz in Bol. Soc. Brot. V, 88. — Norte e centro do paiz.

305. **A. vérna** (Lin.) Wahl.; Arenaria verna, Lin., Mach.

in Journ. Sc. Phy. Math. e Nat. x, 208. — Serra da Estrella.

raç. **recúrva** (All.); *Arenaria recurva*, All.; *Alsine recurva*, Wah.; *Aren. laricifolia*, Brot. in Fl. lusit. II, 202, non Lin. — Gerez.

88. SAGÍNA, Lin.

306. **S. nodósa** (Lin.) Fenz.; *Spergula nodosa*, Lin. — Costa marítima, desde Aveiro a Ilhavo, nos terrenos arenosos.

307. **S. sabuletórum** (Gay) Lge., Mariz in Bol. Soc. Brot. v, 87; *Spergula sabuletorum*, Gay. — Traz dos Montes e Douro.

308. **S. subuláta** (Sw.) Presl.; *Spergula subulata*, Sw.; *Spergula saginoides*, Brot. in Fl. lusit. II, 215, non Lin. — Norte e centro.

var. *pygmaea*, Samp. — Littoral do norte.

309. **S. marítima**, D. Don., Mach. in Journ. Sc. Phy. Mat. et Nat. — Beira-mar, de norte a sul do paiz.

var. *dénsa* (Jord.). — Littoral do norte.

var. *nana*, Samp. — Littoral do norte.

310. **S. apétala**, Ard.; Brot. pro var. *S. procumbens*, in Fl. lusit. II, 214. — Quasi todo o paiz.

for. *barbáta*, Fenz. — Varias localidades.

for. *capilláris*, Lge. — Varias localidades.

raç. **ciliáta** (Fries); *Sagina ciliata*, Fries, Mariz in Bol. Soc. Brot. v, 86. — Norte e centro.

311. **S. procúbens**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 213. — Abundante ao norte e rara no sul.

89. QUÉRIA, Lin.

312. **Q. hispánica**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 123. — Portalegre e Marvão, nos muros (n. v.).

90. SPÉRGULA, Rupp.

313. **S. arvênsis**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 214.—Todo o paiz. Vulg. *Esparguta*, *Górga*.

var. *vulgáris* (Boen.). — Todo o paiz.

var. *máxima* (Weihe). — Norte (rara).

var. *grácilis*, Petit. — Littoral do sul.

var. *laricina* (Wulf.). — Centro e sul.

314. **S. vernális**, Willd., J. Henriq. in Exp. scient. 94.
— Quasi todo o paiz (varias localidades).

var. *Morisonii* (Bor.). — Diversos logares, do Minho ao Alemtejo.

var. *pentándra* (Lin.). — Traz dos Montes (Bragança, etc.) e Douro.

raç. **celtibérica** (Asch.); *Spergula vernalis* vr. *celtibérica*, Asch. & S.; *Sp. pentandra* vr. *viscosa*, Bois. non *Sp. viscosa* Lag. — Serra da Estrella!

91. SPERGULÁRIA, Pers.

315. **S. segetális** (Lin.) Don., Willk. in Prod. Fl. Hisp. III, 163. — Traz dos Montes e Douro.

316. **S. modésta**, Samp. in Bol. Soc. Brot. XXIV, p. 23 et in herb. Acad. Polyt. Porto.

raç. **atheniênsis** (Heldr. et Sart.); *S. rubra* vr. *atheniensis*, Heldr. et Sart.; *S. atheniensis*, Asch., Samp. in An. Acad. Polyt. Port. an. 1904. — Norte a sul.
var. *pallescens*, Samp. — Varias localidades, no norte.

raç. **úrbica** (Leffl.); *Lepigonum caninum* vr. *urbicum*, Leffl.; *Spergularia urbica* Nym., Freyn in Bol. Soc. Brot. XVI, 216; *Sp. halophila* vr. *urbica*, Samp. in loc. cit. — Norte a sul.

var. *salinária*, Samp.; *Sperg. atheniensis* *b* *salinaria*, Samp. in loc. cit.

raç. **marína** (Lin.); *Arenaria rubra* vr. *marina*, Lin.; *Arenaria marina*, Brot. in Fl. lusit. II, 201; *Spergularia marina*, Griseb.; *Sp. halophila* vr. *Dilleni*, Samp. in loc. cit. — Norte a sul.

317. **S. média** (Lin.) Presl., Mach. in Cat. met. xx; Arenaria media, Lin.; Sperg. marginata, Kitt.; Sperg. halophila vr. marginata, Samp. in An. Acad. Polyt. Port. an. 1904. — Centro e sul do paiz.

raç. **Nobreána**, Samp., Spergularia Nobreana, Samp. in Not. crit. 24. — Sul do paiz.

318. **S. coloráta**, Samp. in Bol. Soc. Brot. xxiv, p. 22 et in herb. Acad. Polyt. Port. — Especie collecticia, apresentando entre nós as seguintes raças:

raç. **purpúrea** (Pers.); Arenaria purpurea, Pers.; Spergularia purpurea, Don., Samp. in An. Acad. Polyt. Port. an. 1904. — De Traz dos Montes ao Algarve. Vulg. *Sapinho roxo*.

var. *longipes* (Lge.); Lepigonum rubrum vr. longipes, Lge.; Spergularia rubra vr. longipes, Willk., Mariz in Bol. Soc. Brot. vi, 40; Sp. purpurea vr. longipes, Samp. in loc. cit. — Frequente.

raç. **induráta**, Samp.; Spergularia purpurea, var. indurata, Samp. in Not. crit., 22. — Baixo Alemtejo, nos montados.

raç. **crassipes**, Samp.; Spergularia purpurea, var. crassipes, Samp. in Not. crit., 28. — Rochedos maritimos do Baixo-Alemtejo.

raç. **austrális**, Samp.; Spergularia rupicula, raç. australis, Samp. in An. Acad. Polyt. Port. an. 1904; Sperg. rupestris, Willk. in Prod. Fl. Hisp. III, 166. — Rochedos e terrenos duros da borda do mar.

raç. **rupiculoides**, Samp. in herb. Ac. Polyt. Port.; Sp. rupicula, Samp. in Not. crit. 23, non Leb. — Rochedos e terrenos duros da borda do mar, no Baixo-Alemtejo.

319. **S. radicans**, Presl., Samp. in An. Ac. Polyt. Port. an. 1904. — Predomina nos terrenos graniticos, desde o Minho (frequente) ao Alto Alemtejo (rara). Vulg. *Gorgão*.

raç. **capillácea** (Lge.); Lepigonum capillaceum, Lge. Sperg. capillacea, Willk., Mariz in Bol. Soc. Brot. vi, 40. — Minho e Douro (littoral).

92. POLYCÁRPON, Loeßl.

320. **P. tetraphyllum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 123.
— Todo o paiz.

var. *floribundum*, Willk., Mariz in Bol. Soc. Brot.
VI, 37. — Centro.

var. *alsinifolium* (DC.); Mariz in loc. cit. — Areaes
maritimos, de norte a sul.

93. ORTÉGIA, Loeßl.

321. **O. hispánica**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 53. — De
Traz dos Montes ao Alto Alemtejo.

94. LOEFLÍNGIA, Lin.

322. **L. hispánica**, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 63. — Mar-
gens do Tejo (Montalvão, Monforte e Gollegã, ex Brot.;
Villa Velha do Rodan, ex P. Cout. in litt.).

323. **L. micrantha**, Bois. et Reut., Willk. in Prod. Fl.
Hisp. III, 159; Loeßl. pentandra, Wehr. non Cav. — Desde
o Douro ao Algarve.

324. **L. Tavaresiána**, Samp. in Not. crit. 25 (an. 1906)
— Areaes maritimos do Alemtejo! e margens do Gua-
diana (P. Cout. in litt.).

95. ILLECÉBRUM, Rupp.

325. **Il. verticillátum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 302.
— Quasi todo o paiz, de norte a sul.

96. PARONYCHIA, Tour.

326. **P. argétea**, Lamk.; Illecebrum paronychia, Lin.,
Brot. in Fl. lusit. I, 303. — Quasi todo o paiz, de norte
a sul. Vulg. *Erva prata*, *Erva dos unheiros*, *Paronychia de*
Clasio.

327. **P. polygonifolia** (Will.) DC.; J. Henriq. in Exp. scient., 93. — Serra da Estrella (frequente na região das lagoas).
328. **P. echinata**, Lamk.; Illecebrum echinatum, Desf., Brot. in Fl. lusit. I, 302 et in Phyt. lusit. I, 29, tab. 22. — Desde a Beira ao Baixo Alemtejo. Vulg. *Erva prego*, *Paronychia ouriçada*.
329. **P. cymosa** (Lin.) DC., Illecebrum cymosum, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 302. — De norte a sul, em muitas localidades.

97. **HERNIÁRIA**, Tour.

330. **H. hirsuta**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 410. — Quasi todo o paiz, de norte a sul.
var. *cinerea* (DC.); H. cinerea, DC., Mariz in Bol. Soc. Brot. VI, 33. — Do Minho ao Algarve.
331. **H. polymorpha**, Samp. in herb. Acad. Polyt. Port. — Do Minho ao Alemtejo. Vulg. *Herniaria*, *Erva turca*,
raç. **glabra** (Lin.); H. glabra, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 410. — Minho e Douro littoral.
var. *microcarpa* (Presl.) — Desde o Minho ás Beiras.
var. *ciliata* (Bab.) — Costa maritima do norte e centro.
raç. **scabrida** (Bois.); H. scabrida, Bois., Mariz in Bol. Soc. Brot. I, 32. — Desde o Douro ao Baixo Alemtejo.
var. *glabrescens*, Bois. — Beiras, aqui e ali.
raç. **maritima** (Link.), H. maritima, Link. in Journ. fur die Botanik I, 57 (an. 1800) — Costa maritima do centro e sul.
332. **H. latifolia**, Lap., Mariz in Bol. Soc. Brot. VI, 31. Arredores de Bragança (n. v.).

98. CORRIGÍOLA, Dill.

333. **C. littoralis**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 476. — Quasi todo o paiz, de norte a sul.
334. **C. telephiifolia**, Pour., Willk. in Prod. Fl. Hisp. III, 149; C. littoralis, Brot. var. foliis latioribus, subglaucis, inflorescentia racemosa. — Quasi todo o paiz, de norte a sul.

99. SCLERÁNTHUS, Lin.

335. **S. ánnuus**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 171. — Desde o Minho ao Alto Alemtejo.
var. *hibernus*, Reich. — Norte do paiz, em regiões elevadas.
336. **S. perénis**, Lin., Mariz in Bol. Soc. Brot. VI, 29. — Serras de Montesinho e Rebordãos.
337. **S. collinus**, Horng.; S. verticillatus, Tauch. — Traz dos Montes (Bragança! Serra de Rebordãos!).

FAM. XV — PORTULACACEAE, Lindl.

100. PORTULÁCA, Tour.

338. **P. olerácea**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 257. — Todo o paiz. Vulg. *Beldroega*.
raç. **satíva** (Hors.); P. hortensis, Grisl. — Cultivada nas hortas, no centro e sul.

101. MÓNTIA, Mich.

339. **M. fontána**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 124.
raç. **mínor**, (C. Gmel), Mariz in Bol. Soc. Brot. VI, 43. — De norte a sul.
raç. **rivuláris** (C. Gmel), Mariz in loc. cit. 44. — Norte e centro.

FAM. XVI — TAMARICACEAE, Lindl.

102. TÁMARIX, Lin.

340. **T. hispânica**, Bois.; *T. gallica*, Brot. in Fl. lusit. I, 474, non Lin., *T. africana*, C. Mach. (non Poir?) — Desde o Douro ao Algarve. Vulg. *Tamargueira*, *Tamariz*.

Como plantas ornamentaes cultivam-se a **T. anglica**, Webb. e a **T. gallica**, Lin.

FAM. XVII — ELATINACEAE, Lindl.

103. ELATÍNE, Lin.

341. **E. paludósa**, Seub., P. Cout. in Bol. Soc. Brot. XII, 34.

raç. **major** (A. Br.); *E. paludosa* β . *octandra*, Gren. et God., P. Cout. in loc. cit. — Trancoso e Aveiro. (n. v.).

342. **E. alsinástrum**, Lin., P. Cout. in Bol. Soc. Brot. XII, 34. — Villar Formoso (n. v.).

FAM. XVIII — HYPERICACEAE, Lindl.

104. HYPÉRICUM, Tour.

343. **H. androsæum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 324. — Norte e centro. Vulg. *Androsémo*, *Hipericão*.

344. **H. acútum**, Moench.; *H. quadrangulare*, Brot. in Fl. lusit. II, 322.

var. *undulátum* (Schousb.); C. Mach. in loc. cit. 108. — Quasi todo o paiz.

var. *báticum* (Bois.); P. Cout. in Bol. Soc. Brot. XII, 20. — De norte a sul.

345. **H. linarifólium**, Vahl., Brot. in Fl. lusit. II, 321.
— De norte a sul.
 raç. **obtusisépalum**, P. Cout. in Bol. Soc. Brot. XII,
 22. — Algumas localidades, de norte a sul.
346. **H. humifúsum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 322. —
 De norte a sul.
347. **H. perfoliátum**, Lin.; *H. ciliatum*, Lamk., Brot.
 in Phyt. lusit. I, 189, tab. 77. — Da Extremadura ao
 Algarve.
348. **H. perforátum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 322.
 — Desde o Minho ao Algarve. Vulg. *Milfurada*.
 for. *angustifólium*, Gand. — Todo o paiz.
349. **H. púlchrum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 323. —
 Desde o Minho ás Beiras.
350. **H. montánum**, Lin., P. Cout. in Bol. Soc. Brot.
 XII, 28. — Desde Traz dos Montes ás Beiras (n. v.).
351. **H. tomentósum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 324;
 H. lusitanicum, Poir. — Centro e sul.
 var. *dissitiflórum*, De Roem., P. Cout. in loc. cit. 29.
 — De Buarcos ao Algarve.
 raç. **pubéscens** (Bois.), Ball. in Spic. fl. mar. — Ex-
 tremadura e Alemtejo.
352. **H. helódes**, Huds., Brot. in Fl. lusit. II, 324. — De
 norte a sul, em muitas localidades.

Nos jardins cultivam-se o **H. calycinum**, Lin. sob a denominação de *Raios do sol*, e o **H. hircinum**, Lin., que por vezes apparecem como subespontaneos. Tambem foi encontrado em Alfeite o **H. atomarium**, Bois. que provavelmente é ali planta adventicia.

FAM. XIX — MALVACEAE, Juss.

105. MÁLOPE, Lin.

353. **M. malachoides**, Lin., C. Mach. in Cat. meth. 190.

var. *trífida* (Cav.), P. Cout. in Bol. Soc. Brot. XI, 105. — Arredores de Lisboa (rara) n. v.

106. ALTHAÉA, Tour.

354. **A. officinális**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 280. — Desde o Douro ao Algarve. Vulg. *Althéa*, *Malvaisco*.

355. **A. longiflóra**, Bois. et Reut., P. Cout. in Bol. Soc. Brot. XI, 129. — Arredores d'Elvas (n. v.).

Com o nome de *Gigantes* ou *Malva da India* cultivam-se nos jardins as **A. rósea**, Cav. e a **A. ficifolia**, Cav.

107. LAVATÉRA, Tour.

356. **L. arbórea**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 277. — Norte e centro, em algumas localidades.

var. *berlengensis*, P. Cout. in Bol. Soc. Brot. XI, 122. — Ilhas Berlengas.

357. **L. Davaei**, P. Cout. in Bol. Soc. Brot., XI, 122. — Desde Sines ao Algarve, no littoral.

358. **L. crética**, Lin., C. Mach. in Cat. meth. 110; **L. sylvestris**, Brot. in Fl. lusit. II, 277, et in Ph. lusit. II, 225, tab. 179, fig. 2. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Malvão*.

359. **L. tríloba**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 276. — Arredores de Tavira (Brot.) n. v.

360. **L. ólbia**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 276. — Centro e sul.

var. *hispida* (Desf.) — Centro e sul.

361. **L. triméstris**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 278. —
Centro e sul.

var. *pseudotrimestris* (Rouy), P. Cout. in Bol. Soc.
Brot. XI, 126. — Centro e sul.

108. MALVA, Tour.

362. **M. hispânica**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 274. —
Desde a Beira ao Algarve.

363. **M. alcéa**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 274; *M. laci-*
niata, Brot. in loc. cit. 275.

raç. **itálica** (Poll.); *M. Morenii*, P. Cout. in Bol. Soc.
Brot. XI, 112, non Pollini; *M. Colmeiroi*, P. Cout.
in loc. cit. 113. — Desde o Minho ao Alemtejo.

var. *multidentata*, Koch. — Alto Alemtejo.

raç. **fastigiata** (Cav.); *M. moschata*, C. Mach. in Cat.
met. 110 non Lin.; *M. moschata* + *M. Tournefor-*
tiana, P. Cout. in Bol. Soc. Brot. XI. — De Traz
dos Montes á Beira.

var. *bismalva* (Bernh.) — Beira Baixa.

364. **M. silvéstris**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 273. — De
Traz dos Montes ao Alemtejo. Vulg. *Malva*.

var. *polymorpha* (Gus.) — Da Beira ao Algarve.

365. **M. nicæénsis**, All., C. Mach. in Cat. Meth., 111;
M. rotundifolia, Brot. in Fl. lusit. II, 273, non Lin. —
Desde o Minho ao Algarve. Vulg. *Malva*.

var. *littoralis*, Merino. — Littoral do Alto Minho,

366. **M. rotundifolia**, Lin., C. Mach., in Cat. meth.,
111; *M. vulgaris*, P. Cout. in Bol. Soc. Brot. XI, 119. —
Desde o Minho e Traz dos Montes ao Alemtejo. Vulg.
Malva.

367. **M. parviflora**, Lin.; C. Mach. in Cat. meth., 111.
— Desde a Extremadura ao Algarve. Vulg. *Malva*.

raç. **microcarpa** (Desf.). P. Cout. in Bol. Soc. Brot
XI, 119. — Desde a Beira Baixa ao Alemtejo.

109. ABÚTILON, Tour.

368. **A. Avicénnæ**, Gaertn., Mach. in Cat. meth., 111.
— Extremadura (Azambuja e Alcanhões) n. v.

110. SÍDA, Lin.

369. **S. rhombifolia**, Lin., Samp. in Not. crit., 26. —
Naturalisada em diversas localidades do Minho.

FAM. XX — LINACEAE, Lindl.

111. RADÍOLA, Dill.

370. **R. multiflora** (Lam.) Aschers.; *Linum rhadíola*,
Lin., Brot. in Fl. lusit. 1; *R. linoides*, Roth. — Todo o
paiz.

var. *emarginata*, Samp. in An. Sc. Nat. vi, 72. —
Terrenos do litoral.

112. LÍNUM, Tour.

371. **L. cathárticum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. 1, 485.
— Regiões elevadas, desde Castro Laboreiro á Serra de
Rebordãos. Vulg. *Linho purgante*.

372. **L. gallicum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. 1, 483. — Desde
o Douro ao Algarve.

373. **L. setíceum**, Brot. in Ph. lusit. fasc. 1.^o (ediç. an.
1800), 45, tab. vi. — Desde a Bairrada ao Algarve.

374. **L. stríctum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. 1, 484. — Desde
a Bairrada ao Algarve.

var. *alternum* (Pers.). — Aqui e ali.

var. *axillare*, G. Godr. — Aqui e ali, no centro e sul.

375. **L. ténue**, Desf.; *L. melianthum*, Brot. in Fl. lusit. 1,
484. — Da Extremadura ao Algarve.

376. **L. marítimum**, Lin., Wilk. in Prod. Fl. Hisp. III, 546: Samp. in Not. Crit., 26. — Littoral do Baixo Alemtejo.
377. **L. angustifolium**, Huds., Mach. in Cat. meth. 112; L. agreste, Brot. in Fl. lusit. I, 481. — Desde o Minho ao Algarve. Vulg. *Linho bravo*.

São cultivadas, sobretudo no norte do paiz, diferentes variedades do **L. usitatissimum**, Lin. vulgarmente denominado *Linho*. Taes são o *Linho da terra*, *Linho do inverno*, *Linho galego* e *Linho mourisco*. O **L. viscosum**, Lin. e o **L. narbonnense**, Lin. citados por alguns auctores, não teem apparecido aos modernos colleccionadores do nosso paiz.

FAM. XXI — GERANIACEAE, DC.

113. GERÁNIUM, Tour.

378. **G. Robertianum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 71. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Erva de S. Roberto*, *Erva Roberta*, *Bico de grou robertino*.
379. **G. lucidum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 72. — Desde o Minho e Traz dos Montes ao Alemtejo.
380. **G. mólle**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 72. — Todo o paiz. Vulg. *Bico de pomba menor*.
var. *grandiflorum*, Lge., Samp. in Not. crit., 26. — Villa do Conde.
381. **G. pyrenaicum**, Burm. f., Mariz in Bol. Soc. Brot. VIII, 161. — Desde o Minho e Traz dos Montes á Beira Baixa.
382. **G. pusillum**, Burm. f., Mariz in Bol. Soc. Brot. VIII, 163. — Beira Baixa (Guarda, Trancoso, etc.).
383. **G. rotundifolium**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 72. — Desde o Douro ao Algarve.
384. **G. disséctum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 73. — Desde o Minho ao Algarve.

385. **G. columbínium**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II. — Desde o Minho ao Algarve. Vulg. *Bico de pomba*.

386. **G. sanguíneum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 74. — Desde o Gerez e Traz dos Montes ao Baixo Alemtejo.

114. ERÓDIUM, Hérit.

387. **E. cicutárium** (L.), Herit.; *Geranium cicutarium*, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 75. — Todo o paiz. Vulg. *Bico de grou*, *Agulha de pastor*.

var. *primulaceum* (Welw.) — Desde o Minho á Extremadura.

var. *chaerophyllum* (DC.) — Sul do paiz.

388. **E. Jacquinianum**, Fisch. et Mey., Mariz in Bol. Soc. Brot. VIII, 166. — Litoral, desde a Figueira da Foz ao Algarve.

raç. **sabulícola** (Lge.); *Erodium sabulicola*, Lge., Mariz in loc. cit., 166. — Littoral, do Minho ao Algarve.

389. **E. Salzmanni**, Del., Lange in Prod. Fl. Hisp. III, 537. — Littoral, desde a Extremadura ao Baixo Alemtejo.

390. **E. moscháturn** (Burm. f.) Herit.; *Geranium moschatum* Burm. f., Brot. in Fl. lusit. II, 74. — Desde o Minho ao Algarve. Vulg. *Agulheira moscada*, *Bico de grou moscado*.

for. *præcox* (Lge.) — Centro e sul.

391. **E. chíum** (Burm. f.) Willd., Mach. in Cat. meth. — Do Alto Douro ao Algarve, em diversos logares.

392. **E. malachoides** (Lin.) Willd.; *Geranium malachoides* Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 74. — De Traz dos Montes ao Algarve.

393. **E. Botrys** (Cav.) Bert.; *Geranium Botrys*, Cav., Brot. in Fl. lusit. II, 74. — Desde Traz dos Montes ao Algarve.

Citam-se como plantas portuguezas o **C. romanum** (Burm.), Willd.

e o **E. laciniatum** (Cav.) Willd., que não tem apparecido aos modernos herborisadores, no nosso paiz.

FAM. XXII — OXALIDACEAE, Lindl.

115. ÓXALIS, Lin.

394. **O. corniculata**, Lim., Brot. in Fl. lusit. II, 223.
Desde o Minho ao Algarve. Vulg. *Trevo azedo*.
var. *minor*, Lge. — Centro.
395. **O. cernua**, Thumb., Mach. in Cat. meth. — Aclimatada e expontanea, desde o Douro littoral ao Algarve.
396. **O. Martianna**, Zucc., Mariz in Bol. Soc. Brot. VIII, 160. — Aclimatada e expontanea, no norte do paiz.
397. **O. purpúrea**, Jacq., E. Johnston in Rev. Soc. Inst. Port. I, 122. — Aclimatada e expontanea em varios logares do norte e centro do paiz.

FAM. XXIII — ZYGOPHYLLACEAE, Lindl.

116. TRÍBULUS, Tour.

398. **T. terrestris**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 70. —
Desde Traz dos Montes ao Algarve. Vulg. *Abrolho*,
Abrolho terrestre.

A **Fagonia crética**, Lin., indicada por Willk. et Lge. no nosso paiz, não tem sido encontrada pelos herborisadores portuguezes.

FAM. XXIV — RUTACEAE, Juss.

117. RÚTA, Tour.

399. **R. chalepensis**, Lin., Mach. in Cat. meth. 116;

R. graveolens, Brot. in Fl. lusit. II, 16, non Lin.; *R. angustifolia*, Pers. — Centro littoral. Vulg. *Arruda* ou *Ruda*.

var. *attenuata*, P. Cout.; *R. angustifolia* β . *attenuata*, P. Cout. in Bol. Soc. Brot. XII, 9. — Centro e sul.

raç. **bracteósa** (DC.), Mach, in loc. cit. 116. — Desde Traz dos Montes ao Algarve.

400. **R. montána** (Lin.) Mill., Mach. in Cat. meth., 116; *R. tenuifolia*, Willd., Brot. in Fl. lusit. II, 16. — Desde o Minho (rara) e Traz dos Montes ao Algarve. Vulg. *Arrudão*.

Do gen. **Citrus** cultivam-se varias especies, sendo mais frequentes o **C. aurantium**, Lin. (*Laranjeira*), o **C. vulgaris**, Ris. (*Laranjeira azeda*), o **C. nobilis**, Lour. (*Tangerineira*) e o **C. limon**, Lin. (*Limoeiro*).

FAM. XXV — AQUIFOLIACEAE, DC.

118. AQUIFÓLIUM, Tour.

401. **A. vulgáre**, St.-Lag.; *Ilex aquifolium*, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 213. — Desde o Minho e Traz dos Montes á Beira, Vulg. *Azevinho*, *Pica-folha*.

FAM. XXVI — RHAMNACEAE, Lindl.

119. RHÁMNUS, Tour.

402. **R. flángula**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 301. — Desde o Minho ao Baixo Alemtejo. Vulg. *Zangarinho*, *Sanguinho d'agua*, *Frangula*, *Amieiro negro*.
403. **R. alatérnus**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 301. — Desde o Minho litoral ao Algarve. Vulg. *Aderno bastardo*, *Sanguinho das sebes*, *Aroeira*.
404. **R. oleoides**, Lin., Willk. in Prod. Fl. Hisp. III, 482. — Desde Traz dos Montes ao Algarve.
- var. *lycioides* (Lin.); Brot. in Fl. lusit. I, 300. — Desde o Alto Douro ao Baixo Alemtejo.

120. ZÍZYPHUS, Tour.

405. **Z. lótus** (Lin.) Lamk.; *Rhamnus lotus*, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 301. — Subespontaneo (?) e cultivado no Alentejo e Algarve. Vulg. *Açufeira menor*, *Anafega menor*, *Lódão verdadeiro*.

O **Z. sativa**, Gaertn., denominado *Açufeira maior* e *Anafega maior*, cultiva-se no Algarve.

FAM. XXVII — VITACEAE, Lindl.

121. VÍTIS, Tour.

406. **V. vinífera**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 300. Vulg. *Vide*, *Videira*, *Parreira*, *Uveira*.

var. *silvestris*, DC. — De norte a sul, em algumas localidades.

var. *sativa*, DC. — Cultivada em todo o paiz, com muitas castas.

FAM. XXVIII — ACERACEAE, J. St.-Hill.

122. ÁCER, Tour.

407. **A. pseudoplátanus**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 35. — Regiões montanhosas do Minho. Vulg. *Platano bastardo*.

408. **A. campéstre**, Lin. Brot. in Fl. lusit. II, 35. — Serra d'Arrabida (ex Link in Viag. Port.). Vulg. *Bordo commun*.

409. **A. monspessulánum**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 35. — Douro e Traz dos Montes. Vulg. *Zélha*.

(Continúa)

LES POLYNOMES D'HERMITE RATTACHÉS AUX POLYNOMES DE LEGENDRE

PAR

PAUL APPELL

Membre de l'Institut de France

1. Les polynômes $X_n(x)$ de LEGENDRE sont définis par la fonction génératrice

$$(1) \quad (1 - 2ax + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum a^n X_n(x);$$

ceux d'HERMITE (*C. Rendus*, t. 60) par

$$(2) \quad [(1 - ax - by)^2 + (a^2 + b^2)(1 - x^2 - y^2)]^{-\frac{1}{2}} = \sum a^m b^n U_{m,n}(x, y)$$

qui montre l'analogie avec la formule (1) écrite sous la forme

$$(3) \quad [(1 - ax)^2 + a^2(1 - x^2)]^{-\frac{1}{2}} = \sum a^n X_n(x).$$

On sait, et je ne reviendrai pas sur ce point, que le polynôme X_n est, à un facteur constant près, égal à la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $(1 - x^2)^n$ et que, de même, le polynôme $U_{m,n}$ est, à un facteur constant près, égal à la dérivée

$$\frac{d^{m+n} (1 - x^2 - y^2)^{m+n}}{dx^m dy^n}.$$

Dans la formule (2) considérons x et y d'une part, a et b

d'autre part comme les coordonnées rectangulaires de deux points P et A; en introduisant les coordonnées polaires de ces deux points, nous poserons

$$(P) \quad x = \Upsilon \cos \theta, \quad y = \Upsilon \sin \theta$$

$$(A) \quad a = \rho \cos \alpha, \quad b = \rho \sin \alpha,$$

et nous aurons

$$\left[(1 - \Upsilon \rho \cos(\theta - \alpha))^2 + \rho^2 (1 - \Upsilon^2) \right]^{-\frac{1}{2}} = \sum \rho^{m+n} \cos^m \alpha \sin^n \alpha U_{m,n}.$$

Développons et réunissons les termes de même degré N en ρ , en posant

$$m + n = N, \quad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2 \dots N \\ n=N, N-1, \dots 0 \end{pmatrix},$$

nous aurons

$$(4) \quad \left[1 - 2 \Upsilon \rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2 (1 - \Upsilon^2 \sin^2(\theta - \alpha)) \right]^{-\frac{1}{2}} = \sum \rho^N H_N$$

où H_N désigne le polynôme de degré N en x et y

$$(5) \quad H_N = \sum_{m+n=N} \cos^m \alpha \sin^n \alpha U_{m,n}.$$

Ceci posé, posons

$$\rho \sqrt{1 - \Upsilon^2 \sin^2(\theta - \alpha)} = \lambda,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} & \left[1 - 2\lambda \frac{\Upsilon \cos(\theta - \alpha)}{\sqrt{1 - \Upsilon^2 \sin^2(\theta - \alpha)}} + \lambda^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum \lambda^N [1 - \Upsilon^2 \sin^2(\theta - \alpha)]^{-\frac{N}{2}} H_N, \end{aligned}$$

mais, en comparant avec la formule (1), on a

$$\begin{aligned} & \left[1 - 2\lambda \frac{\Upsilon \cos(\theta - \alpha)}{\sqrt{1 - \Upsilon^2 \sin^2(\theta - \alpha)}} + \lambda^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum \lambda^N X_N \left(\frac{\Upsilon \cos(\theta - \alpha)}{\sqrt{1 - \Upsilon^2 \sin^2(\theta - \alpha)}} \right). \end{aligned}$$

On a donc, enfin, en identifiant les deux développements, la

formule

$$(6) \quad H_N = [1 - r^2 \sin^2(\theta - \alpha)]^{\frac{N}{2}} X_N \left(\frac{r \cos(\theta - \alpha)}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\theta - \alpha)}} \right).$$

En remplaçant $r \cos \theta$ et $r \sin \theta$ par x et y on obtient le polynôme H_N défini par (5) qui se trouve ainsi exprimé à l'aide d'un polynôme de LEGENDRE.

Si dans $1 - r^2 \sin^2(\theta - \alpha)$ on remplace 1 par $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$, on voit que l'expression (6) est homogène et de degré N en $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$; en l'ordonnant par rapport aux puissances de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$, on obtiendra, d'après (5) le polynôme $U_{m,n}$ comme coefficient de $\cos^m \alpha \sin^n \alpha$.

On peut ainsi obtenir tous les polynômes $U_{m,n}$ d'un degré donné N , en partant du polynôme X_N de LEGENDRE.

2. L'on peut déduire tous les polynômes $U_{m,n}$ d'un degré donné $m + n = N$ du premier d'entre eux $U_{N,0}$. En effet, faisons $\alpha = 0$ dans les identités (5) et (6) nous aurons

$$(7) \quad H_N^0 = U_{N,0}(x, y) = (1 - r^2 \sin^2 \theta)^{\frac{N}{2}} X_N \left(\frac{r \cos \theta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}} \right) \\ = (1 - y^2)^{\frac{N}{2}} X_N \left(\frac{x}{\sqrt{1 - y^2}} \right)$$

formule facile à vérifier directement à l'aide des expressions de X_N et $U_{N,0}$ par des dérivées d'ordre N ; dans cette formule nous écrivons H_N^0 au lieu de H_N pour rappeler que l'on a fait $\alpha = 0$.

Pour revenir maintenant à la formule générale (6) où α est quelconque, il suffit, dans (7), de remplacer θ par $\theta - \alpha$, c'est-à-dire

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

par

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

et l'on aura

$$(8) \quad U_{N,0}(x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha) \\ = \sum_{m+n=N} \cos^m \alpha \sin^n \alpha U_{m,n}(x, y).$$

Il suffira donc de partir du polynôme $U_{N,0}$ et d'y faire le

..

changement d'axes de coordonnées indiqué en rendant $U_{N,0}$ homogène en $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$: les coefficients des termes de la forme $\cos^m \alpha \sin^n \alpha$ seront les polynômes $U_{m,n}$, de degré $m + n = N$.

Ce résultat pourrait aussi être établi, d'une autre manière par le calcul direct de l'expression

$$\frac{d^N (1 - x'^2 - y'^2)^N}{dx^N}$$

où

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

SOBRE OS INTEGRAES DE FRESNEL

POR

F. GOMES TEIXEIRA

Sabe-se que os integraes de FRESNEL podem ser obtidos por meio da inversão da ordem das integrações de um integral duplo com limites infinitos, e são conhecidos meios de dar á applicação d'este methodo todo o rigor. Aqui vamos determinál-os por este mesmo methodo, empregando porém, para lhe dar rigor uma analyse differente da que tem sido empregada pelos auctores que tem tratado d'este assumpto, e de que temos conhecimento.

Consideremos a identidade

$$(1) \quad \int_a^A \operatorname{sen} a \, da \int_0^X e^{-ax^2} dx = \int_0^X dx \int_a^A e^{-ax^2} \operatorname{sen} a \, da,$$

Temos

$$\begin{aligned} & \int_0^X dx \int_a^A e^{-ax^2} \operatorname{sen} a \, da \\ &= \int_0^X \left[\frac{e^{-ax^2} (x^2 \operatorname{sen} a + \cos a)}{1+x^4} - \frac{e^{-Ax^2} (x^2 \operatorname{sen} A + \cos A)}{1+x^4} \right] dx \\ &= \cos a \int_0^X \frac{e^{-ax^2} dx}{1+x^4} - \cos A \int_0^X \frac{e^{-Ax^2} dx}{1+x^4} \\ &+ \operatorname{sen} a \int_0^X \frac{x^2 e^{-ax^2} dx}{1+x^4} - \operatorname{sen} A \int_0^X \frac{x^2 e^{-Ax^2} dx}{1+x^4}. \end{aligned}$$

Temos tambem

$$\int_0^X \frac{x^2 e^{-Ax^2} dx}{1+x^4} = \frac{1}{1+x_1^4} \int_0^X x^2 e^{-Ax^2} dx,$$

x_1 designando um numero comprehendido entre 0 e X, e

$$\int_0^\infty x^2 e^{-Ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} A^{-\frac{3}{2}};$$

portanto, fazendo tender X para ∞ , e notando que o primeiro membro da primeira egualdade augmenta constantemente com X, sem poder exceder o maior valor $\frac{1}{4} \sqrt{\pi} A^{-\frac{3}{2}}$ do segundo membro, e que portanto tende para um limite finito, e que porisso $\frac{1}{1+x_1^4}$ tende para um limite determinado L, inferior á unidade,

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-Ax^2} dx}{1+x^4} = \frac{1}{4} L \sqrt{\pi} A^{-\frac{3}{2}}.$$

Fazendo agora tender A para ∞ , vem

$$\lim_{A=\infty} \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-Ax^2}}{1+x^4} dx = 0.$$

Do mesmo modo se demonstra que

$$\lim_{A=\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-Ax^2}}{1+x^4} dx = 0.$$

Portanto

$$(2) \quad \lim_{A, X=\infty} \int_0^X dx \int_0^A e^{-ax^2} \operatorname{sen} a da = \cos a \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} dx}{1+x^4} \\ + \operatorname{sen} a \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-ax^2} dx}{1+x^4}.$$

Por outra parte, temos, pondo $ax^2 = y^2$,

$$\int_a^A \operatorname{sen} \alpha d\alpha \int_0^X e^{-ax^2} dx = \int_a^A \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha \int_0^{\sqrt{a}X} e^{-y^2} dy,$$

e, integrando por partes o segundo membro d'esta egualdade,

$$\begin{aligned} \int_a^A \operatorname{sen} \alpha d\alpha \int_0^X e^{-ax^2} dx &= \left[\int_a^A \frac{\operatorname{sen} \alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha}} \cdot \int_0^{\sqrt{a}X} e^{-y^2} dy \right]_a^A \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_a^A X \alpha^{-\frac{1}{2}} e^{-aX^2} d\alpha \int_a^a \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha. \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} \int_a^A X \alpha^{-\frac{1}{2}} e^{-aX^2} d\alpha \int_a^a \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha &= \alpha_1^{-\frac{1}{2}} \int_a^{\alpha_1} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha \cdot \int_a^A X e^{-aX^2} d\alpha \\ &= \alpha_1^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-aX^2} - e^{-A^2}}{X} \int_a^{\alpha_1} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha, \end{aligned}$$

onde α_1 designa um numero comprehendido entre a e A , e portanto

$$\lim_{X=\infty} \int_a^A X \alpha^{-\frac{1}{2}} e^{-aX^2} d\alpha \int_a^a \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha = 0.$$

Temos pois, fazendo tender primeiramente X e depois A para ∞ ,

$$\begin{aligned} \lim_{A, X=\infty} \int_a^A \operatorname{sen} \alpha d\alpha \int_0^X e^{-ax^2} dx &= \int_a^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_a^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha. \end{aligned}$$

Esta egualdade e as egualdades (1) e (2) dão

$$(3) \quad \cos a \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} dx}{1+x^4} + \operatorname{sen} a \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-ax^2} dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_a^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha.$$

Temos porém

$$\lim_{a=0} \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^4} dx = \lim_{a=0} \int_0^u \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^4} dx + \lim_{a=0} \int_u^{\infty} \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^4} dx,$$

e portanto

$$\lim_{a=0} \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^4} dx = \int_0^u \lim_{a=0} \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^4} dx + \lim_{a=0} \int_u^{\infty} \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^4} dx,$$

ou, observando que o ultimo integral que entra nesta relação é finito, e que portanto tende para 0, quando u tende para ∞ ,

$$\lim_{a=0} \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^4} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{4 \operatorname{sen} \frac{3}{4} \pi}.$$

Do mesmo modo se obtém a egualdade

$$\lim_{a=0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2}}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}.$$

Logo, fazendo tender em (3) a para 0, vem

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Do mesmo modo se obtém a fórmula

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\alpha}} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Os dois integraes cujos valores vimos de obter são conhecidos pelo nome de *integraes de Fresnel*, por terem sido encontrados por este physico eminente em uma questão de Optica. Mas os seus valores tinham já sido obtidos anteriormente por EULER e LAPLACE.

NOTES DE BRYOLOGIE PORTUGAISE

PAR

ALPHONSE LUISIER

II

Depuis mon dernier article, malgré une longue interruption de près d'une année, j'ai pu faire de nouvelles et fructueuses recherches sur la flore bryologique portugaise. En septembre 1908, je visitais le Gerez pendant trois jours; aux vacances de Noël, je me rendais avec deux collègues et amis, les Rev. Pères ANTONIO PINTO et CAMILLE TORREND, professeurs au Collège de Campolide, à Villa Viçosa et à la Serra d'Ossa. C'est, je crois, la première excursion bryologique qui ait été faite jusqu'ici dans l'Alemtejo. Au commencement d'avril de cette année, nous organisions, le R. P. TORREND et moi, une excursion scientifique à Monchique, à la quelle prirent part neuf élèves de la classe de septième, sciences, du Collège de Campolide. Inutile de dire que nous en sommes revenus enchantés et chargés de collections de toutes sortes. L'Algarve et particulièrement Monchique, avait été déjà, en 1868, soigneusement étudié, au point de vue bryologique, par M. le COMTE DE SOLMS-LAUBACH, qui y séjourna quelques mois et publia les résultats de ses recherches. Nous y fîmes, malgré cela, de bonnes découvertes, entre autre celles du *Rhacomitrium lanuginosum* au sommet de la Picota, de *Pogonatum nanum* à Picota et à Foia, de *Polytrichum piliferum* à Foia et d'autres encore, qui avaient échappé à l'attention de M. SOLMS-LAUBACH.

D'autres excursions à Monsanto, Bellas, Cintra, Torres Vedras et Setubal ont augmenté aussi considérablement mon matériel d'étude. Quelques uns de mes amis y ont aussi contribué: M. MORAES CARDOSO, étudiant en droit à l'Université, m'a envoyé des mousses des environs de Coïmbre; deux de mes élèves: PEREIRA CABRAL et RAUL NOBRE m'en ont récolté aussi un certain nombre, le premier à Monsul, le second à Odemira. A tous mes plus sincères remerciements.

Collège de Campolide le 1 août 1909.

HÉPATIQUES

Riccia Bischoffii Hübn. Torres Vedras: Serra de Socorro, déc. 1907. Villa Viçosa: Tapada, déc. 1908.

Riccia lamellosa Raddi, Santarem: Porta do Sol, où elle est abondante, nov. 1906; Setubal: S. Paulo, déc. 1906.

Riccia crystallina L. Lisbonne: Campo Grande, déc. 1906, Campolide, janv. 1907.

Tesselina pyramidata Dum. Villa Viçosa: Tapada, où elle est abondante, aux endroits pierreux ♀ et ♂, déc. 1908; Algarve: Caldas de Monchique ♂, avril 1909.

Targionia hypophylla L. Très commune aux environs de Lisbonne, Cintra, Torres Vedras, etc.

Grimaldia dichotoma Raddi. Lourical do Campo, août 1906; Setubal: Outão, avril 1907; Santarem, nov. 1906.

Sphaerocarpus terrestris (Mich.) Smith. Lisbonne: Campo Grande, déc. 1906; Torres Vedras: Cadriceira, fév. 1908.

Pallavicinia Lyellii Hook. Setubal: Pixaleiros, avril 1907.

Pellia epiphylla (L.). Guimarães: bords du Selho, août 1907.

Pellia Fabroniana Raddi. Felgueiras: Pombeiro, août 1907.

Masurpella aquatica Schiffn. Serra da Estrella: ruisseau au dessus du Sanatorium, où elle est abondante. Sept. 1906. Nouvelle pour le Portugal. Det. LACOUTURE.

Lophozia turbinata Steph. Setubal: Ruines du couvent de S. Paulo, déc. 1906 (det. LACOUTURE). Nouvelle pour la flore portugaise.

Diplophyllum albicans (L.) Dum. Guimarães: Penha, août 1907; Gerez: Leonte, sept. 1908.

Scapania compacta Dum. Guimarães: au sommet de la Penha, août 1907; S. Fiel, août 1906.

Scapania resupinata (L.) Dum. Cintra, nov. 1906.

Scapania undulata Dum. var. *purpurea* Nees. Serra da Estrella: Ruisseaux au dessus du Sanatorium, août 1906 (det. LACOUTURE). La variété *purpurea* est nouvelle pour le Portugal.

Scapania nemorosa Dum. Felgueiras: Pombeiro, août 1907.

Madotheca platyphylla (L.) Covilhã (var. *major*, Ldb. ♂, det. MATOUSCHEK) leg. M. Pacheco!; Cintra, nov. 1906.

Madotheca thuja Dum. Guimarães: Britteiros, août 1907.

Madotheca porella Nees. Guimarães: murs aux bords du Rio Selho, où elle est abondante et n'est inondée que pendant l'hiver, août 1907. Nouvelle pour le Portugal.

Lejeunea Rossetiana Mass. Setubal: Serra da Arrabida, avril 1907. Nouvelle pour le Portugal. Det. LACOUTURE.

Frullania calcarifera Steph. Cette espèce endémique ne paraît pas rare en Portugal, au moins dans le centre et au nord.

Elle avait été découverte par WELWITSCH à Cintra, puis par M. MOLLER à Coimbra en 1886; je l'ai récoltée à Cintra, à Guimarães, etc.

MOUSSES

Pleuridium subulatum (Huds.) Rab. Torres Vedras: Cadriceira, avril 1908; Algarve: au sommet de la Foia, avril 1909; Serra da Gardunha, août 1906. Cette espèce paraît assez commune en Portugal.

Gymnostomum calcareum Nees et Hornsch. Schp. Torres Vedras: Collegio do Barro, 1908; Mafra: murs d'enceinte de la Tapada Real, juin, 1908; Cintra: murs au bord de la route au dessus de la *Fonte da Sabuga*, nov. 1906.

Les exemplaires de Mafra et de Cintra me paraissent appartenir à la variété *intermedia* Schp. C'est d'ailleurs, comme le remarque Schimper, *Species valde variabilis difficillime extricanda!* (Syn. Musc. II, p. 41).

Eucladium verticillatum (L.) B. E. Torres Vedras: Tufs calcaires, près de Cadriceira, avril 1908; Mafra: murs de la Tapada, juin, 1908; Setubal: Tufs calcaires près des anciens couvents de S. Paulo, déc. 1907.

Les exemplaires de Torres Vedras et de Mafra n'ont que des tiges très courtes de 6-8 mill. et presque simples.

Leucobryum glaucum (L.) Schp. Cintra: Sous les chênes dans le Parc de Monserrate, où il forme de magnifiques tapis, nov. 1908.

Ceratodon purpureus (L.) Brid. *pallidisetus* n. var. Lourical do Campo, sur les vieux murs, août, 1906; Gerez: Caldas (Tavares!).

Ces exemplaires ont un pédicelle jaune paille, mais ne se distinguent guère du type que par ce caractère. LIMPRICHT a décrit une variété *flaviseta* à feuilles longuement acuminées et dont j'ai récolté autrefois des exemplaires dans le Tirol. Elle me semble tout à fait distincte de la mienne.

Pottia minutula (Schl.) Br. eur. Torres Vedras: Quinta do Collegio do Barro, sur la terre humide, janv. 1908.

Didymodon luridus Hornsch. Guimarães: murs près du cimetière, ster. août 1906.

Timmiella flexiseta (Bruch.) Limp. Bords de la Lagoa de Albufeira, août 1907.

Cette espèce intéressante avait été récoltée en 1868 parmi les Cistes, à la serra da Picota (Algarve) par M. de SOLMS-LAUBACH. Elle croît aussi dans l'île de Sardaigne et dans l'Amérique du Nord. A Albufeira, elle croît parmi les Cistes et les Ajones; je ne l'ai pas trouvée en fruits.

Aloina ambigua (Br. eur.) Limpr. Torres Vedras: Barro c. fr., 1908; Villa Viçosa c. fr., déc. 1908.

Fissidens Warnstorffii Fl. Dans ma note précédente, j'avais indiqué cette plante dans les environs de Setubal. J'ai eu le plaisir de la découvrir, cette année, dans un bassin d'eau très calcaire, à Lumiar, près de Lisbonne, où elle était très abondante. C'est, si je ne me trompe, la troisième localité connue.

Fissidens crassipes Wils. Beaux échantillons sur les murs humides d'un moulin près de Furadoiro, à Torres Vedras, mai 1908.

Grimmia fragilis Schp. Serra da Estrella: Espinhaço do Cão, sept. 1906, où elle n'est pas rare et forme des tapis très mous d'un vert noirâtre. Cette espèce avait été découverte à la Serra da Estrella, par WELWITSCH, en 1848. Selon ROTH, elle croît en Espagne et en Portugal. Je crois qu'il y a erreur et qu'elle n'est connue jusqu'ici que du Portugal. M. ROTH a, par distraction, placé en Espagne la Serra da Estrella (Europ. Laubmoos, 1, p. 418) et c'est là, je crois, l'unique motif pour le quel il cite l'Espagne.

Grimmia trichophylla Grev. S. Fiel vieux murs, août 1906. Les exemplaires que j'ai récoltés, en fruits, à S. Fiel me semblent appartenir au type, qui serait nouveau pour le Portugal.

Dryptoden Hartmanni (Schp.) var. *epilosa* Mild. Guimarães: Penha, août 1907. Det. BOTTINI; la variété est nouvelle pour le Portugal.

Rhacomitrium microcarpum (Schr.) Brid. Gerez: rochers du Modorno, sept. 1908. Nouveau pour le Portugal.

Rhacomitrium lanuginosum Brid. Cette espèce est ré-

pandue sur toutes les montagnes granitiques du Portugal, depuis le Gerez, où elle forme, avec quelques autres Grimmeries, la presque totalité de la flore bryologique des hauts sommets pierreux de la montagne, jusqu'à l'Algarve. Je l'ai récoltée, en avril 1909, au sommet de la Serra da Picota, à Monchique. Elle y avait échappé aux observations de M. SOLMS-LAUBACH, et est nouvelle, je crois, pour la flore de l'Algarve.

Ptychomitrium polyphyllum Bruch. Gerez (P. Tavares!); environs de Guimarães, août 1907. J'ai montré ailleurs ⁽¹⁾ que la *Dicranoweisia robusta* décrite en 1881, par VENTURI, était identique au *Ptychomitrium polyphyllum*.

Zygodon viridissimus Brid. Torres Vedras: Collegio do Barro, sur les arbres, surtout sur les vieux chênes, ainsi que sur la route, près de Turcifal. c. fr. Mars 1908.

Orthotrichum leiocarpum Br. eur. Gerez: sur un *Sorbus aucuparia* dans les rochers au dessus du *Valle do Teixeira*, en société avec *Ulota crispa* et *U. americana*. c. fr. sept. 1908.

Anomobryum juliforme Solms-Laub. Lourical do Campo, août 1906 et août 1909 c. fr. Monchique (localité classique) avril 1909.

Pogonatum nanum P. B. Monchique: Foia et Picota c. fr. avril 1909. Espèce nouvelle pour la flore de l'Algarve.

Polytrichum piliferum Schr. Cette espèce est très commune en Portugal, depuis le Minho jusqu'à l'Algarve, où je l'ai trouvée en avril 1909, à la Serra de Foia. Nouveau pour l'Algarve.

Diphyseium foliosum Mohr. Guimarães: Britteiros, août 1907 c. fr.

Fontinalis Duriaei Sch. Bellas, dans un ruisseau, nov. 1908.

Neckera pumila Hedw. Gerez: propriété de M. Biel, au

(1) Communication faite à la Société portugaise des sciences naturelles.

bord d'une cascade, où elle fructifiait abondamment, sept. 1908.

Neckera crispa (L.) Hedw. Gerez: propriété de M. Tait, aux endroits les plus sombres, où elle croît en abondance et forme de longs ramaux pendants, très élégants, sept. 1908. Elle avait déjà été signalée au Gerez par LINK et modernement par NEWTON; récoltée au Bussaco par MOLLER.

Aerocladium cuspidatum (L.) Ldb. Cintra: Parmi le gazon dans le parc de Monserrate, nov. 1908.

•
*Travail fait à l'Institut des Sciences Naturelles
au Collège de Campolide.*

SUR UNE PARTICULARITÉ DE LA COURBE MÉDIANE DE QUELQUES CRANES PORTUGAIS

PAR

A. AURELIO DA COSTA FERREIRA

Dans la série typique de crânes portugais que nous avons organisée au Musée Bocage de l'École Polytechnique, il nous manquait encore des représentants des types de l'Alemtejo et de l'Algarve que l'étude statistique des mesures anthropométriques nous avait amené à présenter et à décrire dans notre travail: *La capacité du crâne et la composition ethnique probable du peuple portugais* (Bull. et Mémoires de la Société d'Anthropologie de Paris, 1904).

Dans le but de les découvrir, nous séparâmes des séries de l'Alemtejo et de l'Algarve, existant dans la collection Ferraz de Macedo, les crânes qui, par leurs caractères, inscrits dans le registre général des mesures, nous semblaient se rapprocher le plus des types que nous cherchions. Dans l'Algarve nous primes de préférence les crânes mésaticéphales, grands et d'une mésorrhinie plus accentuée: dans l'Alemtejo, nous choisîmes les mésaticéphales d'un indice céphalique presque identique à celui des premiers, mais d'une capacité beaucoup plus petite et d'un indice nasal beaucoup plus bas. Or, le premier examen de la *norma-latéralis* de ces crânes nous révéla, dans quelques uns du moins, une particularité notable et curieuse de la courbe médiane: une *dépression rétro-coronale* remarquable. Cette concavité de la courbe sagittale commençait à s'ébau-



Fig. 1

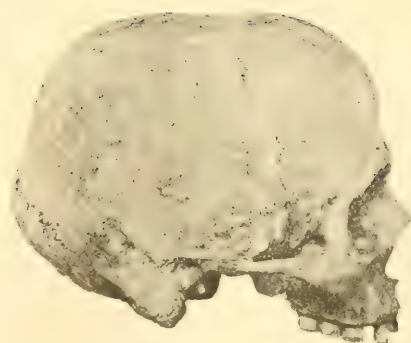


Fig. 2

cher dans la dernière partie de la ligne frontale, se continuait régulièrement en une dépression plus accentuée de la courbe juxta-bregmatique des pariétaux et formait la ligne de profil d'une espèce de gouttière (rigole) qui s'étendait de l'un et de l'autre côté du crâne, dans la direction des trous auditifs, plus creuse d'un côté que de l'autre; puis diminuant rapidement de profondeur, elle s'effaçait et disparaissait complètement, à la hauteur, à peu près, de la ligne temporale supérieure. Nous avons fait, peut de temps auparavant, une étude comparative entre les moyennes de quelques mesures anthropométriques des crânes de l'Alemtejo et de l'Algarve de la collection Ferraz de Macedo, et celles des crânes qui avaient servi à VERNEAU pour démontrer la pénétration syro-arabe dans la population des Canaries (*Sur quelques crânes de l'Alemtejo et de l'Algarve* — Bulletin de la Société portugaise de sciences naturelles); et cette étude avait abouti, en fin de compte, à la démonstration simple et claire de l'existence d'une pénétration arabe dans la population du sud et du sud-est de Portugal: aussi nous rappelâmes-nous aussitôt les paroles de VERNEAU: *Signalons encore une particularité anatomique qui se retrouve aux Canaries et en Egypte, je veux parler de la dépression qui existe en arrière de la suture coronale et qui contourne le crâne d'une tempe à l'autre, comme si l'on avait appliqué sur ce point un bandeau qui aurait comprimé les pariétaux*. N'était ce point, par hasard, une nouvelle preuve qui nous sautait aux yeux, de la pénétration arabe? Nous allons le voir.

Cette particularité de la courbe médiane par nous découverte sur les crânes dont nous avons parlé au début de ce travail, nous résolûmes de la rechercher sur tous les exemplaires de l'Alemtejo et de l'Algarve de la collection Ferraz de Macedo. Eh bien! sur 32 crânes nous en avons trouvé 12 où se reconnaissait plus ou moins distinctement la présence de cette dépression retro-coronale. En quelques-uns, cette dépression se réduisait à un simple aplatissement juxta-bregmatique de la courbe médiane. Mais le plus curieux, c'est que l'existence de cette particularité de la courbe n'était pas l'apanage des crânes de tel ou tel type. Dans les crânes les plus disparates se retrouvait l'ensellure si caractéristique qui nous avait si vivement frappé.

Il semblait que nous aurions dû penser plutôt à une déformation pratiquée, non pas dans toute l'étendue de l'Alemtejo et de l'Algarve (la proportion de 37,50/0 ne permettait pas d'admettre cette supposition) mais du moins sur certains points de ces deux provinces.

Ce n'eût été pour nous, tout au plus, que l'indice de l'*influence moresque*, manifesté par une conséquence de pratiques de déformation introduites dans la Péninsule par les maures, ainsi que l'insinuent Casteplane de Camarès (Bull. et Mémoires de la Société d'Anthropologie de Paris, 1873), et DELISLE (*Les déformations artificielles du crâne* — Bull. et Mémoires de la Société d'Anthropologie de Paris, 1902).

Mais, dans la certitude que les déformations artificielles ne sont pas héréditaires, et en l'absence de renseignements positifs (que nous avons cherchés sans les obtenir) sur le fait de savoir si la déformation du crâne se pratique actuellement dans nos provinces de l'Alemtejo et de l'Algarve, nous inclinons à considérer la particularité signalée de la courbe médiane comme une déformation apparente comparable, par exemple, au *chignon* ou à l'aplatissement obélien des *cro-magnons*, résultant d'une formule spécial de l'évolution des segments osseux et cérébraux.

Nous considérerons, quant à présent, la dépression de nos crânes de l'Alemtejo et de l'Algarve, comme identique à la dépression en *rigole* que l'on peut trouver dans des crânes non déformés, et dont parle DELISLE, et à la dépression rétro-coronale des syro-arabes de VERNEAU.

En résumé, tant qu'il ne sera pas prouvé que la déformation du crâne se pratique actuellement dans l'Alemtejo et dans l'Algarve, nous persisterons à considérer la dépression rétro-coronale existant dans les crânes portugais comme un caractère ethnique notablement dissociable, prouvant qu'il existe des signes d'une pénétration arabe au sein de la population portugaise contemporaine.

Nous donnons, en gravures, les deux crânes où nous avons observé le plus nettement l'*ensellure* de la courbe médiane. Le premier de ces crânes appartient à l'Alemtejo, le second à l'Algarve. Leurs caractères sont bien différents, comme il est du reste facile de le voir en jetant un coup d'œil sur les gravures. Le crâne de l'Algarve a un remarquable chignon occipital, suture métopique, lignes suturales simples et un wormien près de l'*obélion*, c'est un crâne tout à fait impressionnant, anormal⁽¹⁾; le crâne de l'Alemtejo est très lourd et présente, à l'encontre du premier, une face allongée, des orbites hautes,

(¹) Collection FERRAZ DE MACEDO (École Polytechnique), H, n.º 127 (Cim. Occ.).

une ouverture nasale étroite et des lignes osseuses légères (1). La courbe du profil de ces crânes, à part *l'ensellure*, diffère beaucoup de l'un à l'autre (2).

(1) Collection FERRAZ DE MACEDO (École Polytechnique), H, n.º 30 (Cim. Or.).

(2) Dans une visite que nous avons faite récemment à divers musées d'anthropologie de France et d'Italie, nous avons eu l'occasion d'examiner quelques exemplaires de crânes *déprimés*, et nous nous rappelons particulièrement en ce moment : un crâne d'arabe antique, N.º 6956, et un autre, d'arabe également, mais d'un *faciès tout différent* du premier, et qui porte le N.º 6229 dans la collection de crânes arabes du Musée d'Histoire Naturelle de Paris; nous nous souvenons aussi de certaines crânes (N.ºs 14. 27 et 46) d'africains d'Aduá (Musée de Médecine Légale de Turin), d'un crâne de femme Assiut (momie du xxx^e siècle av. J. C.) qui existe au R. Museo della Antichità, de Turin, et enfin d'un crâne d'enfant de la xi^e dynastie, conservé dans la salle des momies de ce même Musée.

Nous consignerons au même temps ici l'observation qu'a bien voulu nous communiquer Mr. le Dr. GAILLARD, du Musée d'Histoire Naturelle de Lyon, qui nous a dit avoir fréquemment constaté une dépression sur le sommet de la tête des garçons d'Egypte.

SUR LA COURBE ARÉOLAIRE D'UNE COURBE DONNÉE

PAR

J. ROSE

Professeur à l'Athénée Royal de Chimay, Belgique

1. Soit une courbe gauche rapportée à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz . On joint un point mobile M de cette courbe au point O pris comme centre des moments. Le rayon vecteur OM engendre une surface conique OM_0M ; on choisit comme côté positif le côté où il faut se placer pour voir le mouvement du rayon vecteur s'effectuer dans le sens des aiguilles d'une montre. Pendant un intervalle de temps infiniment petit dt , le rayon OM vient en OM' ; l'aire plane OMM' peut être représentée par un vecteur AA' (grandeur et direction).

Si l'on imagine un point fictif A qui pendant chaque intervalle dt décrit la ligne vectorielle représentant l'aire OMM' , ce point décrira un polygone infinitésimal qui à la limite deviendra une courbe. Le point décrivant cette courbe est le point aréolaire et cette courbe est la courbe aréolaire de la courbe lieu de M autour du point O ; la vitesse et l'accélération du point A s'appellent vitesse et accélération aréolaires.

2. Soient \bar{e} et \bar{a} les coordonnées vectorielles respectives des points M et A . On a par définition

$$\bar{a} = \lim \Sigma OMM'$$

ou

$$\bar{a} = \frac{1}{2} \int M \bar{e} d\bar{e}$$

car l'aire OMM' représentée par le vecteur $\overline{AA'}$ est égale à

$$Me \cdot \frac{de}{2} = \frac{1}{2} M\bar{e} \cdot d\bar{e}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{a}}{dt} &= \frac{1}{2} M\bar{e} \frac{d\bar{e}}{dt} \\ \frac{d^2\bar{a}}{dt^2} &= \frac{1}{2} M\bar{e} \frac{d^2\bar{e}}{dt^2},\end{aligned}$$

d'où resultent les propriétés connues du mouvement aréolaire.

On peut attribuer au point aréolaire une position initiale quelconque. De l'équation

$$d\bar{a} = \frac{1}{2} M\bar{e} d\bar{e}$$

on tire

$$\bar{a} - \bar{a}_0 = \frac{1}{2} \int_0^t M\bar{e} d\bar{e}$$

\bar{a}_0 correspondant à $t = 0$, on a

$$\bar{a} = \frac{1}{2} \int_0^t M\bar{e} d\bar{e};$$

la coordonnée du point aréolaire est l'aire géométrique totale engendrée depuis l'origine des temps autour du centre O ; c'est le cas de la figure ci-contre.

3. Soient x, y, z les coordonnées du point M de la courbe donnée; X, Y, Z celles du point aréolaire A . On sait qu'une équation vectorielle remplace trois équations de projection. Par suite connaissant la courbe lieu de M , on a sa courbe aréolaire par les équations suivantes obtenues en projetant

l'équation vectorielle $\bar{a} = \frac{1}{2} \int M\bar{e} d\bar{e}$:

$$X = \frac{1}{2} \int y dz - z dy$$

$$Y = \frac{1}{2} \int z dx - x dz$$

$$Z = \frac{1}{2} \int x dy - y dx.$$

En projetant de même les équations vectorielles de la vitesse et de l'accélération aréolaires, on peut écrire

$$\begin{aligned}dX &= \frac{1}{2} (y \, dz - z \, dy) & d^2X &= \frac{1}{2} (y \, d^2z - z \, d^2y) \\dY &= \frac{1}{2} (z \, dx - x \, dz) & d^2Y &= \frac{1}{2} (z \, d^2x - x \, d^2z) \\dZ &= \frac{1}{2} (x \, dy - y \, dx) & d^2Z &= \frac{1}{2} (x \, d^2y - y \, d^2x).\end{aligned}$$

Ces formules peuvent servir à calculer le rayon de tension τ_1 de la courbe aréolaire. En effet abstraction faite du signe, τ_1 est donné par la formule

$$\tau_1 = \frac{D'^2}{H'}$$

dans laquelle

$$\begin{aligned}D'^2 &= A'^2 + B'^2 + C'^2 \\H' &= \begin{vmatrix} dX & dY & dZ \\ d^2X & d^2Y & d^2Z \\ d^3X & d^3Y & d^3Z \end{vmatrix} = A' \, d^3X + B' \, d^3Y + C' \, d^3Z\end{aligned}$$

A' , B' , C ayant les significations indiquées ci-dessous

$$\begin{aligned}A' &= dY \, d^2Z - dZ \, d^2Y = \frac{1}{4} (z \, dx - x \, dz) (x \, d^2y - y \, d^2x) \\&\quad - \frac{1}{4} (x \, dy - y \, dx) (z \, d^2x - x \, d^2z) \\&\quad - \frac{1}{4} [xz \, (dx \, d^2y - dy \, d^2x) + x^2 \, (dy \, d^2z - d^2y \, dz) \\&\quad + xy \, (dz \, d^2x - d^2z \, dx)] = \frac{x}{4} (Ax + By + Cz)\end{aligned}$$

A , B , C ayant les mêmes significations que A' , B' , C' mais pour la courbe lieu de M . De même

$$B' = \frac{y}{4} (Ax + By + Cz) \quad C' = \frac{z}{4} (Ax + By + Cz).$$

De sorte que

$$D'^2 = A'^2 + B'^2 + C'^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{16} (Ax + By + Cz)^2.$$

D'autre part on a également

$$d^3X = \frac{1}{2} (y d^3z - z d^3y + dy d^2z - dz d^2y)$$

$$= \frac{1}{2} (y d^3z - z d^3y + A)$$

$$d^3Y = \frac{1}{2} (z d^3x - x d^3z + B)$$

$$d^3Z = \frac{1}{2} (x d^3y - y d^3x + C).$$

Il en résulte

$$H' = A' d^3X + B' d^3Y + C' d^3Z = \frac{(Ax + By + Cz)^2}{8}$$

et par conséquent

$$\tau_1 = \frac{D'^2}{H'} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = \frac{\rho^2}{2}$$

ρ désignant le rayon vecteur de la courbe M. On a donc le théorème remarquable suivant:

Le rayon de torsion en un point de la courbe aréolaire est égal en valeur absolue à la moitié du carré du rayon vecteur du point correspondant de la courbe donnée.

Si cette dernière est sphérique, sa courbe aréolaire sera à torsion constante puisque le rayon vecteur est constant, le centre des moments étant naturellement le centre de la sphère. Il en résulte un procédé pour la recherche des courbes à torsion constante.

4. Un exemple particulièrement intéressant de ces dernières courbes se présente quand la courbe donnée est une loxodromie sphérique.

Cette dernière peut être définie (Voir *Nouvelles Annales de*

Mathématiques, 1909, p. 49) par les équations suivantes

$$x = r \frac{\cos t}{\operatorname{ch} mt}$$

$$y = r \frac{\sin t}{\operatorname{ch} mt}$$

$$z = r \frac{\operatorname{sh} mt}{\operatorname{ch} mt}$$

r désignant le rayon de la sphère. Par suite

$$dx = -\frac{r}{\operatorname{ch}^2 mt} (\sin t \operatorname{ch} mt + m \cos t \operatorname{sh} mt) dt$$

$$dy = \frac{r}{\operatorname{ch}^2 mt} (\cos t \operatorname{ch} mt - m \sin t \operatorname{sh} mt) dt$$

$$dz = \frac{rm}{\operatorname{ch}^2 mt} dt.$$

Sa courbe aréolaire est donc définie par les équations

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \int \frac{r^2}{\operatorname{ch}^3 mt} (m \sin t + m \sin t \operatorname{sh}^2 mt - \operatorname{sh} mt \operatorname{ch} mt \cos t) dt \\ &= \frac{r^2}{2} \int \frac{m \sin t \operatorname{ch} mt - \operatorname{sh} mt \cos t}{\operatorname{ch}^2 mt} dt \end{aligned}$$

$$Y = -\frac{r^2}{2} \int \frac{\sin t \operatorname{sh} mt + m \cos t \operatorname{ch} mt}{\operatorname{ch}^2 mt} dt$$

$$Z = \frac{r^2}{2} \int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 mt} = \frac{r^2}{2m} \frac{\operatorname{sh} mt}{\operatorname{ch} mt}.$$

Voici encore un autre exemple intéressant. Les symboles sn , cn , dn désignant les fonctions elliptiques de JACOBI; soit la courbe sphérique

$$x = k'r \frac{\cos t}{dn t}$$

$$y = k'r \frac{\sin t}{dn t}$$

$$z = kr \frac{sn t}{dn t}$$

k désignant le module et k' le module complémentaire.

On chercherait aisément les équations paramétriques de sa courbe aréolaire en faisant usage des propriétés connues des fonctions elliptiques.

On pourrait du reste, grâce à ces dernières, trouver les équations d'autres courbes sphériques et de leurs courbes aréolaires et on aurait une série de courbes à torsion constante.

5. Il est un cas particulièrement remarquable où les équations de la courbe aréolaire s'obtiennent sous forme entière; c'est quand la courbe donnée est une clélie (voir F. GOMES TEIXEIRA, *Traité des courbes spéciales*, t. II, p. 531). Les coordonnées cartésiennes d'un point de cette courbe sont

$$x = a \sin m\varphi \cos \varphi \quad y = a \sin m\varphi \sin \varphi \quad z = a \cos m\varphi$$

a désignant le rayon de la sphère sur laquelle elle est tracée. Par suite

$$dx = a(m \cos m\varphi \cos \varphi - \sin m\varphi \sin \varphi) d\varphi$$

$$dy = a(m \cos m\varphi \sin \varphi + \sin m\varphi \cos \varphi) d\varphi$$

$$dz = -a \sin m\varphi d\varphi.$$

Il en résulte que les coordonnées de sa courbe aréolaire laquelle est à torsion constant sont:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \int y dz - z dy = - \int \frac{a^2 m}{2} \sin \varphi d\varphi - \frac{a^2}{4} \int \cos \varphi \sin 2m\varphi d\varphi \\ &= -\frac{a^2 m}{2} \cos \varphi - \frac{a^2}{8} \int [\sin (2m+1)\varphi + \sin (2m-1)\varphi] d\varphi \\ &= -\frac{a^2 m}{2} \cos \varphi + \frac{a^2}{8} \left[\frac{\cos (2m+1)\varphi}{2m+1} + \frac{\cos (2m-1)\varphi}{2m-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2} \int z d\varphi - x dz = \int \frac{a^2 m}{2} \cos \varphi d\varphi - \frac{a^2}{4} \int \sin \varphi \sin 2m\varphi d\varphi \\ &= \frac{a^2 m}{2} \sin \varphi - \frac{a^2}{8} \int [\cos (2m-1)\varphi - \cos (2m+1)\varphi] d\varphi \\ &= \frac{a^2 m}{2} \sin \varphi - \frac{a^2}{8} \left[\frac{\sin (2m-1)\varphi}{2m-1} - \frac{\sin (2m+1)\varphi}{2m+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} \int x \, dy - y \, dx = \int \frac{a^2}{2} \sin^2 m\varphi \, d\varphi = \int \frac{a^2}{2m} \sin^2 m\varphi \, d(m\varphi) \\ &= \frac{a^2}{2m} \left(\frac{m\varphi}{2} - \frac{\sin 2m\varphi}{4} \right). \end{aligned}$$

On pourrait encore donner d'autres exemples; mais ceux-ci suffisent pour montrer quelles conséquences on peut déduire de la propriété énoncée plus haut.

Chimay, 22 avril 1909.

ÉSSAI D'UNE THÉORIE ANALYTIQUE DES LIGNES NON-EUCLIDIENNES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

à Rome

(Suite)

§ 27

Application. — S'il s'agit d'un hypercycle, on a $v = \text{constante} = \mu$ et les équations (16), (16') donnent par intégration

$$S = \begin{cases} u \cdot \sin \mu \\ u \cdot \text{sh } \mu, \end{cases}$$

pourvu que l'on compte l'aire à partir de l'axe des y .

Or si AA' , BB' sont deux perpendiculaires à l'axe des x comprises entre cet axe et l'hypercycle, on a

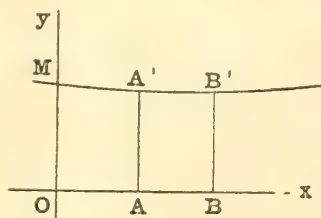


Fig. 15

$$\text{Aire OMBB}' = \begin{cases} OB \cdot \sin \mu \\ OB \cdot \text{sh } \mu \end{cases} \quad \text{Aire OMAA}' = \begin{cases} OA \cdot \sin \mu \\ OA \cdot \text{sh } \mu \end{cases}$$

En retranchant et en rappelant au surplus la deuxième ap-

plication du § 24, on obtient

$$\text{Aire } ABA'B' \left\{ \begin{array}{l} AB \cdot \sin \mu = \text{arc } A'B' \cdot \text{tg } \mu \\ AB \cdot \text{sh } \mu = \text{arc } A'B' \cdot \text{th } \mu \end{array} \right.$$

ce qui démontre que *l'aire du quadrilatère comprise entre un hypercycle, son axe et deux ordonnées arbitraires, est proportionnelle soit à l'arc de l'hypercycle, soit à la projection de cet arc sur l'axe.*

Si l'on remarque que l'aire du pseudocarré à base unitaire (§ 25) a pour valeur $\sin 1$ dans le plan riemannien et $\text{sh } 1$ dans le plan lobatschewskien, on a que *l'aire d'une figure plane quelconque en unités naturelles s'obtient en divisant l'aire de cette figure en carrés unitaires, par $\sin 1$ ou par $\text{sh } 1$, suivant que le plan est riemannien ou lobatschewskien.*

§ 28

Aire du cercle et du secteur. — L'aire du cercle et d'un secteur circulaire quelconque peut être déterminée par la méthode suivante, remarquable par son originalité.

En ayant un cercle non-euclidien de rayon r , si l'on le partage en un nombre très grand n de parties égales, on pourra le considérer comme un polygone convexe formé par un nombre très grand n de côtés très petits. — Si l'on prolonge ces côtés dans une même direction, on a une série de n angles extérieurs, ayant les sommets aux points de division et que nous désignons par les symboles

$$\partial\varepsilon_1, \quad \partial\varepsilon_2, \quad \partial\varepsilon_3, \dots, \quad \partial\varepsilon_n.$$

Les angles intérieurs du polygone que l'on vient de construire ont évidemment les valeurs

$$\pi - \partial\varepsilon_1, \quad \pi - \partial\varepsilon_2, \quad \pi - \partial\varepsilon_3, \dots, \quad \pi - \partial\varepsilon_n.$$

Leur somme est donc

$$n\pi - (\partial\varepsilon_1 + \partial\varepsilon_2 + \partial\varepsilon_3 + \dots + \partial\varepsilon_n),$$

de sorte que *l'excès angulaire* du polygone riemannien et *le défaut angulaire* du polygone lobatschewskien ont respectivement pour expression

$$2\pi - (\partial\varepsilon_1 + \partial\varepsilon_2 + \partial\varepsilon_3 + \dots + \partial\varepsilon_n), \quad (\partial\varepsilon_1 + \partial\varepsilon_2 + \partial\varepsilon_3 + \dots + \partial\varepsilon_n) - 2\pi.$$

Si l'on passe à la limite, en supposant d'augmenter indéfiniment le nombre n des côtés du polygone (ce qui correspond à faire décroître indéfiniment leur longueur) un quelconque des termes $\partial\varepsilon_i$, écrits en parenthèse se réduit à l'angle de contingence $d\varepsilon_i$, du cercle.

Or dans une ligne $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannienne} \\ \text{lobatschewskienne} \end{array} \right\}$ quelconque, le rapport $\frac{ds}{d\varepsilon}$ de l'arc élémentaire à l'angle de contingence correspondant, est égal à $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \rho \\ \operatorname{th} \rho \end{array} \right\}$, ρ étant le rayon de courbure (§ 30).

Mais comme dans le cas actuel $\rho = r$, il résulte :

$$d\varepsilon_i = \left\{ \begin{array}{l} ds \cdot \cot r \\ ds \cdot \cot hr \end{array} \right.,$$

et conséquemment

$$\text{Excès angulaire} = 2\pi - \frac{ds_1 + ds_2 + ds_3 + \dots}{\operatorname{tg} r} = 2\pi - \frac{\text{circonférence}}{\operatorname{tg} r}$$

$$\text{Défaut angulaire} = \frac{ds_1 + ds_2 + ds_3 + \dots}{\operatorname{th} r} - 2\pi = \frac{\text{circonférence}}{\operatorname{th} r} - 2\pi.$$

Le paramètre caractéristique des plans non-euclidiens a été supposé = 1; il s'ensuit que l'excès et le défaut angulaires que l'on vient de calculer expriment sans plus l'aire du cercle en carrés unitaires. — En rappelant alors les formules

$$(19) \quad C = 2\pi \cdot \sin r$$

$$(19') \quad C = 2\pi \cdot \operatorname{sh} r$$

donnant la longueur d'un cercle (§ 24), on obtient pour l'aire circulaire

$$(20) \quad S = 2\pi (1 - \cos r) = 4\pi \sin^2 \left(\frac{r}{2} \right) \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(20') \quad S = 2\pi (\operatorname{ch} r - 1) = 4\pi \operatorname{sh}^2 \left(\frac{r}{2} \right) \quad (\text{dans le p. l.}).$$

En divisant membre à membre les égalités (20) et (19), (20') et (19'), on trouve que le rapport de l'aire d'un cercle à sa longueur est égal à $\frac{r}{2}$, $\operatorname{tg} \left(\frac{r}{2} \right)$, $\operatorname{th} \left(\frac{r}{2} \right)$ suivant que le plan est euclidien, riemannien, lobatschewskien.

(22'): La différentielle de l'aire comprise entre un arc arbitraire d'une ligne plane et les rayons vecteurs extrêmes, a pour expression

$$(23) \quad dS = 2 \sin^2 \left(\frac{R}{2} \right) d\omega = (1 - \cos R) d\omega \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(23') \quad dS = 2 \sinh^2 \left(\frac{R}{2} \right) d\omega = (\operatorname{ch} R - 1) d\omega \quad (\text{dans le p. l.})$$

En éliminant $d\omega$ entre les équations (23) et (6'), (23') et (6'); on trouve

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds} \right)^2} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} \right) ds \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds} \right)^2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos R}{1 + \cos R}} ds \quad (\text{dans le p. r.}) \\ dS &= \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds} \right)^2} \cdot \operatorname{th} \left(\frac{R}{2} \right) ds \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds} \right)^2} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{ch} R - 1}{\operatorname{ch} R + 1}} ds \quad (\text{dans le p. l.}) \end{aligned}$$

s étant l'arc de la ligne.

§ 30

Rayon de courbure. — Soit O_1 le point de rencontre des normales n, n_1 à une ligne plane non-euclidienne quelconque L , en deux points A et B_1 suffisamment rapprochés.

En conservant le point A fixe, déplaçons le point B_1 sur la ligne L de façon, qu'il se rapproche de plus en plus au point A . Si en toutes les positions successives B_2, B_3, \dots du point mobile on mène les normales respectives n_2, n_3, \dots , celles-ci vont couper la normale n , en formant sur cette droite une suite continue de points O_1, O_2, O_3, \dots .

Si dans le rapprochement indéfini du point mobile B_1 au point fixe A le point variable O_1 converge à une certaine position-limite bien définie O (ce qui a lieu dans la

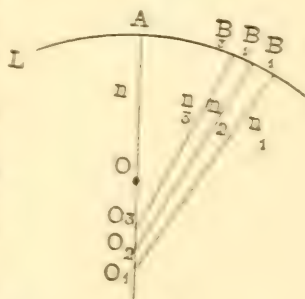


Fig. 17

généralité des cas) le point O s'appelle *centre de courbure* et la distance OA *rayon de courbure* de la ligne donnée au point A. — Le cercle ayant pour centre et pour rayon le centre et le rayon de courbure, s'appelle tout court *cercle de courbure*.

Le centre de courbure, et conséquemment le rayon de courbure, est indéterminé seulement en quelques points *singuliers* de la ligne. Ceux-ci, en nombre fini ou infini, ont d'ordinaire le caractère de points isolés.

L'angle infiniment petit compris entre deux tangentes consécutives d'une ligne, s'appelle *angle de contingence*.

Théorème. — En désignant par $d\varepsilon$, ds , ρ l'angle de contingence, l'arc élémentaire et le rayon de courbure à un point quelconque d'une ligne plane, on a

$$(25) \quad \frac{ds}{d\varepsilon} = \begin{cases} \operatorname{tg} \rho & \text{(dans le p. r.)} \\ \operatorname{th} \rho & \text{(dans le p. l.)} \end{cases}$$

Soient en effet A, B deux points infiniment rapprochés d'une ligne riemannienne L. Les tangentes et les normales en ces points, qui se coupent respectivement à un certain point T et au centre de courbure O, renferment le quadrilatère OATB, dont la somme des angles intérieurs est

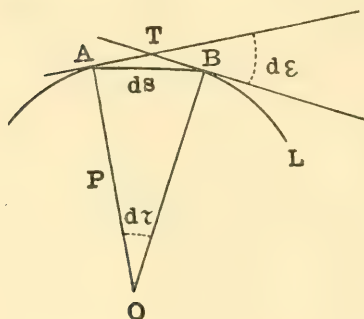


Fig. 18

$$2\pi + d\tau - d\varepsilon,$$

$d\varepsilon$ désignant l'angle de contingence et $d\tau$ l'angle infiniment petit AÔB des normales. — Il s'ensuit que l'aire du quadrilatère (représentée par l'excès angulaire) a pour expression

$$d\tau - d\varepsilon.$$

Mais comme le quadrilatère OATB et le secteur OAB diffèrent entre eux par un infiniment petit d'ordre supérieur, on peut prendre pour expression de l'aire du quadrilatère [(formule (23)]

$$(1 - \cos \rho) d\tau.$$

En égalant ces deux expressions, on trouve

$$d\varepsilon = \cos \rho \cdot d\tau;$$

et si l'on remarque ici que

$$ds = AB = \sin \rho \cdot d\tau,$$

on obtient la relation

$$\frac{ds}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \rho,$$

conformément à l'énoncé du théorème.

Dans le plan lobatschewskien, l'aire du quadrilatère OATB a pour expressions

$$d\varepsilon - d\tau = (\operatorname{ch} \rho - 1) d\tau.$$

On trouve ainsi les deux formules

$$d\varepsilon = \operatorname{ch} \rho \cdot d\tau, \quad ds = \operatorname{sh} \rho \cdot d\tau,$$

donnant par division

$$\frac{ds}{d\varepsilon} = \operatorname{th} \rho.$$

C'est le théorème qu'il fallait démontrer. Le rapport $\frac{d\varepsilon}{ds}$ qui, en vertu du théorème démontré, correspond à $\cot \rho$ ou à $\operatorname{coth} \rho$ suivant la nature du plan, peut s'appeler la *courbure* de la ligne, car il mesure l'écartement de la courbe de la forme rectiligne dans l'intervalle ds .

En éliminant ρ entre les équations (25) et les autres

$$ds = \begin{cases} \sin \rho \cdot d\tau \\ \operatorname{sh} \rho \cdot d\tau \end{cases}$$

que l'on déduit de notre figure par l'application des formules (5) du § 23, on trouve que: *L'angle infiniment petit de deux tangentes consécutives d'une ligne plane, est lié à l'angle infiniment petit $d\tau$ des deux normales correspondantes par la relation*

$$(26) \quad d\tau^2 - d\varepsilon^2 = ds^2 \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(26') \quad d\varepsilon^2 - d\tau^2 = ds^2 \quad (\text{dans le p. l.}).$$

On voit donc que $d\tau = d\varepsilon$, $d\tau > d\varepsilon$, $d\tau < d\varepsilon$ suivant que le plan est euclidien, riemannien, lobatschewskien.

Remarque. — Comme deux droites tracées sur un plan rie-

mannien se coupent toujours en deux points opposés, une ligne plane riemannienne admet, à chacun de ses points, deux centres de courbure distant π entre eux, et conséquemment deux rayons de courbure dont la somme est π .

Les cercles osculateurs d'une ligne lobatschewskienne sont, en général, des cercles propres; mais à certains points particuliers de la ligne, il se peut qu'ils soient des oricycles ou des hypercycles.

§ 31

Quelques expressions du rayon de courbure. — Soient $OA = R$,

$OB = R + dR$ les rayons vecteurs allant de l'origine à deux points consécutifs A, B d'une ligne riemannienne L, AM l'arc circulaire de centre O et de rayon R compris dans l'angle $A\hat{O}B = d\omega$, et θ l'inclinaison du rayon vecteur sur la ligne donnée.

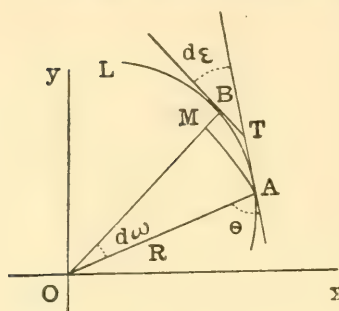


Fig. 19

En supposant que les tangentes aux points A, B se coupent en T, on a

$$O\hat{A}T = \pi - \theta, \quad O\hat{B}T = \theta + d\theta,$$

et conséquemment (§ 29)

$$\text{Aire OAM} = (1 - \cos R) \cdot d\omega.$$

D'ailleurs comme la somme des angles intérieurs du quadrilatère OATB est

$$2\pi + d\omega + d\theta - d\varepsilon,$$

$d\varepsilon$ étant l'angle de contingence, on a

$$\text{Aire OATB} = d\omega + d\theta - d\varepsilon.$$

Or ces aires peuvent être égalées, leur différence AMBT étant un infiniment petit d'ordre supérieur. On obtient ainsi

$$(27) \quad d\varepsilon = d\theta + \cos R \cdot d\omega.$$

Les équation (26), (27), combinées entre elles par division, donnent

$$(28) \quad \operatorname{tg} \rho = \frac{\sqrt{dR^2 + \sin^2 R} \cdot d\omega^2}{d\theta + \cos R \cdot d\omega}.$$

Un procédé analogue appliqué à une ligne lobatschewskienne, porte à la formule

$$(28') \quad \operatorname{th} \rho = \frac{\sqrt{dR^2 + \operatorname{sh}^2 R} \cdot d\omega^2}{d\theta + \operatorname{ch} R \cdot d\omega}.$$

Dans le cas des coordonnées polaires, on a évidemment

$$\cos \theta = \frac{dR}{ds} = \frac{\frac{dR}{d\omega}}{\sqrt{\left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2 + \sin^2 R}}, \quad d\theta = \frac{R'^2 \cos R - R'' \sin R}{\sin^2 R + R'^2} \cdot d\omega$$

et l'équation (28) revient à l'autre

$$(29) \quad \operatorname{tg} \rho = \frac{\left[\sin^2 R + \left(\frac{dR}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\cos R \cdot \sin^2 R + 2 \cos R \cdot \left(\frac{dR}{d\omega} \right)^2 - \sin R \cdot \frac{d^2 R}{d\omega^2}}.$$

Dans le plan lobatschewskien cette formule est remplacée par l'autre

$$(29') \quad \operatorname{th} \rho = \frac{\left[\operatorname{sh}^2 R + \left(\frac{dR}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{ch} R \cdot \operatorname{sh}^2 R + 2 \operatorname{ch} R \cdot \left(\frac{dR}{d\omega} \right)^2 - \operatorname{sh} R \cdot \frac{d^2 R}{d\omega^2}}.$$

En transformant les équations ci-dessus à l'aide des relations entre les coordonnées

$$\xi = \begin{cases} \operatorname{tg} x \\ \operatorname{th} x \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} \operatorname{tg} y \\ \operatorname{th} y \end{cases}$$

et les coordonnées polaires (§ 2), on trouve les autres for-

mules

$$(30) \quad \operatorname{tg} \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dr_1}{d\xi} \right)^2 + \left(r_1 - \xi \frac{dr_1}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{(1 + \xi^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{d^2 r_1}{d\xi^2}}$$

$$(30') \quad \operatorname{th} \rho = - \frac{\left[1 + \left(\frac{dr_1}{d\xi} \right)^2 - \left(r_1 - \xi \frac{dr_1}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{(1 - \xi^2 - r_1^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{d^2 r_1}{d\xi^2}}.$$

§ 32

Extension de formules connues. — Soit A_0 le centre d'un cercle

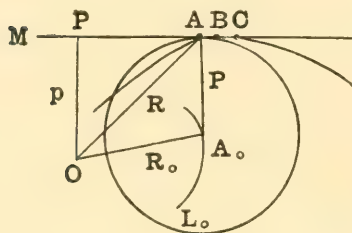


Fig. 20

de rayon ρ , MN la tangente au point arbitraire A, et $OP = p$ la perpendiculaire abaissée d'un point fixe O sur cette droite. — En appelant R le rayon vecteur variable OA et R_0 le segment fixe OA_0 , les triangles OPA, OAA_0 donnent les relations

$$\sin p = \sin R \cdot \sin (O\hat{A}P) = \sin R \cdot \cos (O\hat{A}A_0)$$

$$\cos R_0 = \cos \rho \cos R + \sin \rho \sin R \cdot \cos (O\hat{A}A_0)$$

d'où l'on tire

$$\cos \rho \cos R + \sin \rho \sin p = \cos R_0.$$

Cette équation différentiée et résolue par rapport à $\operatorname{tg} \rho$, donne

$$(31) \quad \operatorname{tg} \rho = \frac{\sin R \cdot dR}{d \sin p}.$$

Cela posé, considérons le cercle de courbure à un point quelconque A d'une ligne plane L.

En faisant ici même construction qu'auparavant, nous aurons pour ce cercle la formule (31); mais comme R, p et leurs différentielles, considérés au point A, ont même valeur rapportés

qu'ils soient au cercle ou à la courbe L (ces deux lignes ayant trois points consécutifs A, B, C en commun) on conclut que la formule (31) vaut pour toute ligne plan riemannienne.

Dans le plan lobatschewskien la formule (31) est remplacée naturellement par l'autre analogue

$$(31') \quad \text{th } \rho = \frac{\text{sh } R \cdot dR}{d \text{ sh } p}.$$

Les deux relations (31), (31') constituent une naturelle extension aux lignes non-euclidiennes de la formule bien connue

$$\rho = \frac{R \cdot dR}{dp},$$

que EULER a donné pour les lignes planes ordinaires.

De la formule $\cos \theta = \frac{dR}{ds}$ donnant l'inclinaison θ du rayon vecteur sur la ligne, on dérive la relation

$$\sin p = \sin R \sin \theta = \sin R \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2},$$

et l'équation (31) revient à l'autre:

$$(32) \quad \text{tg } \rho = \frac{\sin R \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}}{\cos R - \cos R \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - \sin R \frac{d^2 R}{ds^2}} = \frac{\text{tg } R \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}}{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - \text{tg } R \cdot \frac{d^2 R}{ds^2}}$$

A cette relation fait pendant l'autre

$$(32') \quad \text{th } \rho = \frac{\text{sh } R \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}}{\text{ch } R - \text{ch } R \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - \text{sh } R \cdot \frac{d^2 R}{ds^2}} = \frac{\text{th } R \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}}{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - \text{th } R \cdot \frac{d^2 R}{ds^2}}$$

valable pour les lignes lobatschewskiennes.

Dans le plan ordinaire les relations (32), (32') sont rempla-

cées par l'autre plus simple

$$\rho = \frac{R \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}}{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R \frac{d^2 R}{ds^2}}.$$

En remarquant que $\sin p = \sin R \cdot \sin \theta$, $\operatorname{sh} p = \operatorname{sh} R \cdot \sin \theta$, $dR = \cos \theta \cdot ds$, les équations (31), (31') donnent lieu aux formules suivantes

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \cot \rho &= \frac{1}{\sin R \cdot \cos \theta} \cdot \frac{d}{ds} (\sin R \sin \theta) = \operatorname{tg} \theta \cdot \frac{d}{ds} \log (\sin R \sin \theta) \\ &= \frac{\sin \theta}{\operatorname{tg} R} + \frac{d \sin \theta}{dR} = \frac{\sin \theta}{\operatorname{tg} R} + \frac{d\theta}{ds} \end{aligned} \right.$$

$$(33') \quad \left\{ \begin{aligned} \cot h\rho &= \frac{1}{\operatorname{sh} R \cdot \cos \theta} \cdot \frac{d}{ds} (\operatorname{sh} R \sin \theta) = \operatorname{tg} \theta \cdot \frac{d}{ds} \log (\operatorname{sh} R \sin \theta) \\ &= \frac{\sin \theta}{\operatorname{th} R} + \frac{d \sin \theta}{dR} = \frac{\sin \theta}{\operatorname{th} R} + \frac{d\theta}{ds}, \end{aligned} \right.$$

valables respectivement pour les lignes riemannniennes et lo-batschewskiennes.

§ 33

Applications. — 1° *Les cercles non-euclidiens sont des lignes à courbure constante.*

S'il s'agit d'un cercle riemannien ou d'un cercle propre lo-batschewskien, il suffit de remarquer que les équations (32), (32') pour R constant donnent $\rho = R$.

Quant à l'hypercycle, comme il a pour équation (§ 14)

$$\eta = \operatorname{th} \delta \sqrt{1 - \xi^2},$$

la formule (30') donne

$$\operatorname{th} \rho = \cot h\delta = \text{constante.}$$

Il nous reste à considérer l'oricyle, que l'on peut définir comme une trajectoire sous un angle droit d'un faisceau de droites parallèles à une droite fixe (axe Ox).

Pour plus de généralité, considérons la ligne BAC coupant les droites parallèles du faisceau sous l'angle constant α . Soient AF la parallèle et AD la perpendiculaire à Ox passant par A, OD = u et DA = v les coordonnées géographiques de ce point, i et ε les inclinaisons de AD sur la trajectoire et sur la parallèle AF. — En rappelant l'expression de l'arc élémentaire d'une ligne en coordonnées géographiques (§ 23), et en remarquant au surplus que ε est l'angle de parallélisme pour la distance AD = v (§ 11), on a

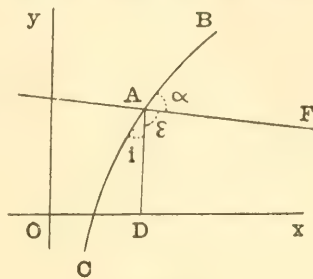


Fig. 21

$$\cos i = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{\sqrt{\text{ch}^2 v \cdot du^2 + dv^2}}, \quad \cot \varepsilon = \text{sh } v.$$

En outre

$$i + \varepsilon + \alpha = \pi,$$

de sorte que si l'on élimine i et ε entre ces équations, on obtient, après quelques calculs, l'équation différentielle

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \text{sh } v}{(\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \text{sh } v) \text{ch } v} dv = \pm du.$$

On trouve d'ici par intégration que la *trajectoire correspondant à l'inclinaison α est représentée (en coordonnées géographiques) par l'équation*

$$\frac{\text{ch } v}{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \text{sh } v} = \frac{1}{c} e^{\pm u},$$

c étant une constante arbitraire.

Si l'on introduit ici les coordonnées $\xi = \text{th } x$, $\eta = \text{th } y$ à l'aide des relations du § 3, et que l'on rappelle l'équation

$$e^{\pm x} = \frac{1 \pm \text{th } x}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}},$$

on obtient pour équation de la trajectoire :

$$(\sin^2 \alpha - c^2) \xi^2 + \eta^2 \pm 2c \cdot \cos \alpha \xi \eta \pm 2c^2 \xi \\ + 2c \cdot \cos \alpha \eta - \sin^2 \alpha + c = 0,$$

Arrivés à ce point, c'est question de faire $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et d'employer la formule (30') pour arriver à la conclusion que l'oricycle est effectivement une ligne à courbure constante.

2° Réciproquement *les lignes non-euclidiennes réelles à courbure constante sont des cercles.*

En posant en effet $\varphi = \text{constante} = k$, la troisième équation (33) donne par intégration

$$\sin \theta = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} k} e^{\int \frac{dR}{\operatorname{tg} R} + c} \right) e^{-\int \frac{dR}{\operatorname{tg} R}}$$

c'est-à-dire

$$\sin \theta \sin R \cdot \sin k + \cos R \cdot \cos k = c \sin k,$$

c étant une constante.

Si l'on suppose que le pôle coïncide avec le centre de courbure au point considéré A, on a $R = k$; et comme en ce point $\sin \theta = 1$, il résulte $c \cdot \sin k = 1$.

Mais si l'on remarque que

$$\sin \theta = \frac{\sin R \cdot d\omega}{ds}, \quad ds^2 = dR^2 + \sin^2 R \cdot d\omega^2,$$

ω étant l'angle polaire, l'équation ci-dessus revient à l'autre

$$\left(\frac{dR}{d\omega} \right)^2 = - \frac{\sin^2 R (\cos R - \cos k)^2}{(1 - \cos R \cdot \cos k)^2}.$$

Or comme la dérivée $\frac{dR}{d\omega}$ est nécessairement réelle, on doit avoir la condition

$$\cos R = \cos k = \text{constante},$$

ce qui démontre la proposition.

Démonstration analogue dans le plan lobatschewskien.

§ 34

Si M, N sont les points où la tangente et la normale à un point quelconque A d'une ligne L coupent la perpendiculaire r

au rayon vecteur OA dans le pôle, les segments

$$AM \equiv t, \quad AN \equiv n,$$

$$OM \equiv S_t, \quad ON \equiv S_n,$$

s'appellent respectivement *tangente*, *normale*, *sous-tangente* et *sous-normale polaires*.

Or si l'on désigne par ω et θ l'angle polaire et l'inclinaison du rayon vecteur R sur la ligne, comme

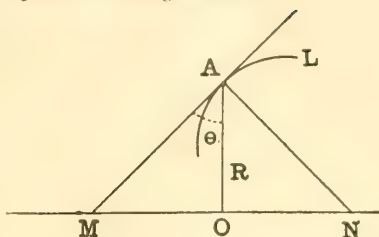


Fig. 22

$$(34) \quad \cos \theta = \frac{dR}{ds} = \frac{\frac{dR}{d\omega}}{\sqrt{\sin^2 R + \left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2}},$$

les triangles rectangles AOM, AON donnent les relations

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} t &= \frac{\operatorname{tg} R \sqrt{\sin^2 R + \left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2}}{\frac{dR}{d\omega}} = \operatorname{tg} R \cdot \frac{ds}{dR} \\ \operatorname{tg} n &= \frac{\sqrt{\sin^2 R + \left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2}}{\cos R} = \frac{1}{\cos R} \cdot \frac{ds}{d\omega} \\ \operatorname{tg} S_t &= \frac{\sin^2 R}{\frac{dR}{d\omega}} \\ \operatorname{tg} S_n &= \frac{dR}{d\omega}. \end{aligned} \right.$$

Dans le plan lobatschewskien on a des formules analogues.

§ 35

Applications. — 1° *Lignes non-euclidiennes à sous-tangente po-*

laire constante. En supposant

$$\operatorname{tg} S_t = \text{constante} = -a,$$

la troisième équation (35) donne

$$\frac{dR}{\sin^2 R} = -\frac{d\omega}{a},$$

d'où il suit par intégration

$$\operatorname{tg} R = \frac{a}{\omega + \omega_0},$$

ω_0 étant une constante arbitraire.

Telle est l'équation polaire de la ligne cherchée.

Sur le plan lobatschewskien on aurait la ligne.

$$\operatorname{th} R = \frac{a}{\omega + \omega_0},$$

et sur le plan euclidien la spirale hyperbolique

$$R = \frac{a}{\omega + \omega_0}.$$

2° En comparant la dernière équation (35) et son analogue du plan lobatschewskien à l'autre

$$S_n = \frac{dR}{d\omega}$$

exprimant la sous-normale polaire d'une ligne euclidienne, on conclut qu'en partant d'une propriété quelconque relative à la sous-normale polaire S_n d'une ligne euclidienne, on déduit la propriété analogue des lignes non-euclidiennes en remplaçant S_n par $\operatorname{tg} S_n$ ou $\operatorname{th} S_n$.

Ainsi, par exemple, sachant que la sous-normale polaire de la spirale de POISSOT est égale au rayon vecteur, on a: *Dans les lignes non-euclidiennes représentées par une équation polaire ayant même forme que celle de la spirale de POISSOT, la tangente (circulaire au hyperbolique) de la sous-normale polaire est égale au rayon vecteur.*

La ligne du plan ordinaire ayant la sous-normale polaire de

longueur constante m , est la spirale d'ARCHIMÈDE

$$R = m\omega.$$

Il s'ensuit que les lignes non-euclidiennes jouissant de même propriété ont pour équation polaire

$$R = \begin{cases} \omega \cdot \operatorname{tg} m & (\text{dans le p. r}) \\ \omega \cdot \operatorname{th} m & (\text{dans le p. l}). \end{cases}$$

Ces lignes peuvent être appelées *spirales d'ARCHIMÈDE non-euclidiennes*, car elles ont évidemment même génération géométrique que la spirale d'ARCHIMÈDE ordinaire.

3° *Lignes riemannniennes dont la tangente de la sous-tangente polaire est une fonction connue de la tangente de la sous-normale polaire*

$$(36) \quad \operatorname{tg} S_t = f(\operatorname{tg} S_n).$$

Cette relation, en vertu des formules (35), conduit à l'équation différentielle

$$(37) \quad \frac{\sin^2 R}{\frac{dR}{d\omega}} = f\left(\frac{dR}{d\omega}\right).$$

Si elle est réductible à la forme

$$\frac{dR}{d\omega} = \varphi(\sin^2 R),$$

φ étant un symbole fonctionnel connu, la ligne est définie par l'équation polaire

$$(38) \quad \omega + \omega_0 = \int \frac{dR}{\varphi(\sin^2 R)},$$

ω_0 étant une constante arbitraire.

Dans le cas où l'équation (37) n'est pas résoluble par rapport à $\frac{dR}{d\omega}$, si l'on pose $\frac{dR}{d\omega} = u$, la ligne cherchée est définie par les équations paramétriques

$$(39) \quad \sin R = \sqrt{uf(u)}, \quad \omega + \omega_0 = \frac{1}{2} \int \frac{f(u) + uf'(u)}{u \sqrt{uf(u)} \sqrt{1 - uf(u)}} du.$$

Ainsi le problème est ramené, dans tout cas, aux quadratures.

Dans le plan lobatschewskien on peut faire une recherche analogue.

§ 36

Généralisation d'un résultat précédent. — La remarquable méthode que l'on a suivie au § 28 pour évaluer l'aire d'un cercle, peut être appliquée à toute ligne plane fermée.

En effet si L est une de ces lignes, en répétant ici la construction et le raisonnement que l'on vient de faire dans le cas du cercle, on trouve pour expression de l'aire S de la courbe

$$S = 2\pi - \left(\frac{ds_1}{\operatorname{tg} \rho_1} + \frac{ds_2}{\operatorname{tg} \rho_2} + \frac{ds_3}{\operatorname{tg} \rho_3} + \dots \right) \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$S = \left(\frac{ds_1}{\operatorname{th} \rho_1} + \frac{ds_2}{\operatorname{tg} \rho_2} + \frac{ds_3}{\operatorname{th} \rho_3} + \dots \right) - 2\pi \quad (\text{dans le p. l.}).$$

les sommes en parenthèse contenant une infinité de termes.

Mais comme les termes infiniment petits de ces séries sont les valeurs que les fonctions

$$\frac{ds}{\operatorname{tg} \rho}, \quad \frac{ds}{\operatorname{th} \rho}$$

prennent aux points successifs de la ligne donnée, on conclut que l'évaluation de l'aire d'une ligne non-euclidienne fermée et à périmètre symple, peut être faite à l'aide de l'une des formules

$$(40) \quad S = 2\pi - \int \frac{ds}{\operatorname{tg} \rho}$$

$$(40') \quad S = \int \frac{ds}{\operatorname{th} \rho} - 2\pi,$$

les intégrations étant étendues à tout le contour de la portion de plan à évaluer.

Dans le cas du cercle de rayon r on a $\rho = r$, et les formules (40), (40') reviennent à celles du § 28.

Cas particuliers. — 1° Considérons la partie de plan comprise entre un arc quelconque ACB de la courbe et la corde AB

joignant les extrémités. — Menons les tangentes AM et BN aux points A et B et posons

$$\text{angle } \hat{M}AB = \alpha,$$

$$\text{angle } \hat{AB}N = \beta.$$

Si l'on suppose de parcourir le périmètre de la figure dans la direction ABCA, il est évident qu'à la somme des angles intérieurs du polygone à côtés très minces, auquel on suppose de réduire la

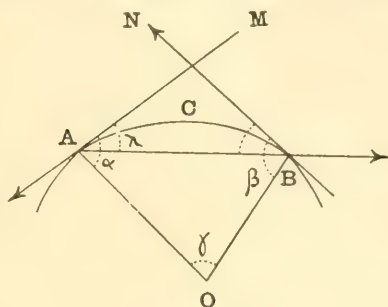


Fig. 23

courbe, il faut joindre explicitement les angles α , β en étendant l'intégration entre les limites A et B. Il résulte ainsi

$$(41) \quad \text{Aire } ACB = 2\pi + \alpha + \beta - \int_A^B \frac{ds}{\operatorname{tg} \rho} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(41') \quad \text{Aire } ACB = \int_A^B \frac{ds}{\operatorname{th} \rho} - 2\pi - \alpha - \beta \quad (\text{dans le p. l.}).$$

2° Soit OACB un secteur compris entre l'arc AB d'une ligne arbitraire et les rayons vecteurs extrêmes OA, OB, et supposons de connaître l'angle $\hat{AOB} = \gamma$ de ces vecteurs et leurs inclinaisons $\hat{OAM} = \alpha$, $\hat{OBN} = \beta$ sur la courbe. — Si l'on tire la corde AB, on a

$$\text{Aire } ACB = 2\pi + \hat{MAB} + \hat{NBA} - \int_A^B \frac{ds}{\operatorname{tg} \rho}$$

$$\text{Aire } AOB = \hat{BAO} + \hat{ABO} + \gamma - 2\pi,$$

et conséquemment

$$(42) \quad \text{Secteur } OACB = \alpha + \beta + \gamma - \int_A^B \frac{ds}{\operatorname{tg} \rho}$$

Dans le plan lobatschewskien on a la formule analogue

$$(42') \quad \text{Secteur } OACB = \int_A^B \frac{ds}{\operatorname{th} \rho} - \alpha - \beta - \gamma.$$

CHAPITRE IV

§ 37

Quelque systèmes de coordonnées. — La puissance de la méthode infinitésimale, comme instrument de recherche géométrique, est augmentée par l'emploi de certains systèmes particuliers de coordonnées.

Nous allons les passer en revue, en démontrant par d'exemples convenables tout le parti que l'on en peut tirer.

Coordonnées radiales. — Ce système de coordonnées est constitué par le rayon vecteur et l'arc. — Si l'on suppose que

$$(1) \quad \omega = F(R)$$

soit l'équation d'une courbe en coordonnées polaires, on trouve, à l'aide des relations (6), (6') du § 23, que *cette ligne est définie (en coordonnées radiales) par une des équations*

$$(2) \quad s + s_0 = \int \sqrt{1 + F'^2(R)} \sin^2 R \cdot dR$$

$$(2') \quad s + s_0 = \int \sqrt{1 + F'^2(R)} \operatorname{sh}^2 R \cdot dR,$$

s_0 étant une constante arbitraire.

Supposons inversement d'avoir une relation finie connue entre R et s , mise sous l'une des formes

$$(3) \quad s = k(R)$$

$$(4) \quad R = \mu(s).$$

Dans le premier cas, il suffit de comparer les équations (2), (3) pour avoir

$$F'(R) = \frac{\sqrt{k'^2(R) - 1}}{\sin R}.$$

Cette relation nous apprend que l'équation (3) définit la ligne représentée par l'équation polaire

$$(5) \quad \omega + \omega_0 = \int \frac{\sqrt{k'^2(R) - 1}}{\sin R} \cdot dR \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(5') \quad \omega + \omega_0 = \int \frac{\sqrt{k'^2(R) - 1}}{\operatorname{sh} R} \cdot dR \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Dans le deuxième cas, si l'on porte l'expression de R dans l'équation (5) du § 23, on trouve

$$d\omega = \frac{\sqrt{1 - \mu'^2(s)}}{\sin \mu(s)} ds,$$

ce qui démontre que l'équation (4) définit la ligne dont l'équation polaire est le résultat de l'élimination de s entre l'équation (4) et l'autre

$$(6) \quad \omega + \omega_0 = \int \frac{\sqrt{1 - \mu'^2(s)}}{\sin \mu(s)} ds \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(6') \quad \omega + \omega_0 = \int \frac{\sqrt{1 - \mu'^2(s)}}{\operatorname{sh} \mu(s)} ds \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Cette analyse démontre que toute relation finie entre les coordonnées radiales R, s , définit une ligne.

§ 38

Soient (R, s) , (R_1, s_1) les coordonnées radiales de deux points correspondants d'une ligne riemannienne quelconque L et de son image L_1 sur le plan euclidien (§ 15). — Comme l'on a (§§ 15-23)

$$(7) \quad R_1 = \operatorname{tg} R, \quad \omega_1 = \omega \\ ds = \sqrt{dR^2 + \sin^2 R \cdot d\omega^2},$$

il résulte la formule

$$ds_1 = \sqrt{dR_1^2 + R_1^2 d\omega_1^2} = \frac{ds}{\cos R},$$

d'où par intégration

$$(8) \quad s_1 = \int \frac{ds}{\cos R} + c$$

c étant une constante. On a d'ailleurs

$$\cos R = \frac{1}{\sqrt{1 + R_1^2}}$$

et conséquemment

$$ds = \cos R ds_1 = \frac{ds_1}{\sqrt{1 + R_1^2}},$$

d'où il suit par intégration

$$(9) \quad s = \int \frac{ds_1}{\sqrt{1 + R_1^2}} + c,$$

c étant une constante.

Ces relations nous apprennent que la connaissance d'une des lignes L , L_1 porte aussitôt à la détermination de l'autre. En effet si $\left\{ \begin{array}{l} \text{la ligne } L \\ \text{l'image } L_1 \end{array} \right\}$ est définie par l'équation $\left\{ \begin{array}{l} R = R(s) \\ R_1 = R_1(s_1) \end{array} \right\}$, l'équation de $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'image } L_1 \\ \text{la ligne } L \end{array} \right\}$ en coordonnées radiales, est le résultat de l'élimination de $\left\{ \begin{array}{l} s \\ s_1 \end{array} \right\}$ entre les équations $\left\{ \begin{array}{l} (7), (8) \\ (7), (9) \end{array} \right\}$.

Dans le cas du plan lobatschewskien, les équations (7), (8), (9) sont remplacées par les autres

$$(7') \quad R_1 = \text{th } R$$

$$(8') \quad s_1 = \int \frac{ds}{\text{ch } R} + c$$

$$(9') \quad s = \int \frac{ds_1}{\sqrt{1 - R_1^2}} + c.$$

En désignant par θ , θ_1 les inclinaisons de la ligne non-euclidienne L et de son image L_1 sur les rayons vecteurs respectifs, on a

$$\cos \theta_1 = \frac{dR_1}{ds_1} = \frac{1}{\cos R} \cdot \frac{dR}{ds},$$

de sorte que les inclinaisons θ , θ_1 sont liées entre elles par la relation

$$(10) \quad \cos \theta_1 = \frac{\cos \theta}{\cos R} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(10') \quad \cos \theta_1 = \frac{\cos \theta}{\text{ch } R} \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Ces équations et les autres

$$(11) \quad ds_1 = \frac{ds}{\cos R}, \quad ds_1 = \frac{ds}{\text{ch } R}$$

combinées entre elles par division, donnent dans tout cas la

relation unique

$$\frac{ds_1}{\cos \theta_1} = \frac{ds}{\cos \theta},$$

dont voici l'interprétation géométrique.

Si $AB = ds$ est l'arc élémentaire d'une ligne, OAA' le rayon vecteur en A et NBA' la normale en B, le rapport $\frac{ds}{\cos \theta}$ représente le segment AA' du rayon vecteur compris entre A et le point A' où ce rayon est coupé par la normale en B. L'égalité ci-dessus démontre donc que la longueur AA' à un point quelconque de la ligne non-euclidienne est conservée dans la représentation.

En posant

$$(12) \quad s_1 = \varphi(s),$$

on trouve par l'application de la relation (11):

$$(13) \quad \cos R = \frac{1}{\varphi'(s)}$$

et d'ici, en vertu de l'équation (7)

$$(14) \quad R_1 = \sqrt{\varphi'^2(s) - 1}.$$

Dans le plan lobatschewskien les équations (13), (14) sont remplacées par les autres

$$(13') \quad \operatorname{ch} R = \frac{1}{\varphi'(s)}$$

$$(14') \quad R_1 = \sqrt{1 - \varphi'^2(s)}.$$

D'ici la propriété: Si l'arc d'une ligne $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannienne} \\ \text{lobatschewskienne} \end{array} \right\}$ L et l'arc de son image L_1 sont liés par la relation finie (12), la ligne L est représentée, en coordonnées radiales, par l'équation $\left\{ \begin{array}{l} (13) \\ (13') \end{array} \right\}$ et son image L_1 par l'équation résultant de l'élimination de s entre les équations (12) et $\left\{ \begin{array}{l} (14) \\ (14') \end{array} \right\}$.

§ 39

Spirale isogonale générale. — Sur une surface quelconque la spirale isogonale est, comme la spirale logarithmique ordinaire, une trajectoire sous un angle constant du faisceau de géodésiques issues d'un point fixe (pôle).

Soient $OA = R$, $OB = R + dR$ les vecteurs géodésiques allant à deux points consécutifs A, B de la spirale, et AM l'arc de cercle géodésique de centre O et de rayon OA compris entre les deux vecteurs.

En désignant par s et θ l'arc de la ligne et son inclinaison constante sur les rayons vecteurs, le triangle rectangle infiniment petit AMB donne la relation

$$dR = ds \cdot \cos \theta,$$

d'où il suit par intégration

$$(15) \quad R = s \cdot \cos \theta$$

quelle que soit la surface contenant la spirale.

Pour une autre spirale isogonale L_1 de pôle O et d'inclinaison θ_1 on a la relation analogue

$$(16) \quad R_1 = s_1 \cdot \cos \theta_1.$$

En faisant ici $R = R_1$, on obtient

$$\frac{s_1}{s} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_1} = \text{constante},$$

ce qui démontre que deux spirales isogonales de même pôle, décrites sur une surface quelconque sont partagées, par une suite de cercles géodésiques ayant le centre au pôle, en parties proportionnelles ou égales, suivant que $\theta \geq \theta_1$, ou $\theta = \theta_1$.

A l'aide de ce théorème plusieurs problèmes sur la spirale isogonale générale, tel que celui de la division d'un arc en parties égales, ou (avec plus de généralité) en parties proportionnelles à des nombres donnés, sont ramenés aux problèmes analogues sur l'arc correspondant d'une géodésique arbitraire issue du pôle.

Le pôle de la spirale isogonale générale est évidemment un point asymptotique.

On reconnaît en outre de l'équation (15) que l'arc de spirale

compris entre le pôle et un cercle géodésique de rayon fini, ayant le centre au pôle, a dans tout cas une longueur finie.

§ 40

Spirales isogonales planes. — Il est évident que dans le plan riemannien la spirale isogonale admet deux pôles distant entre eux π , et la longueur totale de la ligne est $\frac{\pi}{\cos \theta}$.

Les deuxièmes formules (33), (33') du § 32, dans l'hypothèse actuelle de la relation (15), reviennent aux autres

$$(17) \quad \operatorname{tg} \rho = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \operatorname{tg} (s \cdot \cos \theta)$$

$$(17') \quad \operatorname{th} \rho = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \operatorname{th} (s \cdot \cos \theta).$$

En éliminant s entre les équations (15) et (17), (17'), on trouve

$$(18) \quad \operatorname{tg} \rho = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \operatorname{tg} R$$

$$(18') \quad \operatorname{th} \rho = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \operatorname{th} R.$$

Conséquemment dans toute spirale isogonale $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannienne} \\ \text{lobatschewskienne} \end{array} \right\}$ le rayon de courbure est lié à l'arc et au rayon vecteur respectivement par les relations $\left\{ \begin{array}{l} (17), (18) \\ (17'), (18') \end{array} \right\}$.

On reconnaît des équations (18), (18') que le triangle AOA', dont les sommets sont un point quelconque A de la spirale, le centre de courbure correspondant A' et le pôle O, est rectangle en ce point.

Cela revient à dire que le centre de courbure à un point quelconque de la spirale s'obtient en coupant la normale par la perpendiculaire élevée du pôle sur le rayon vecteur.

Cette propriété est un cas particulier d'une autre, relative à la développée d'une ligne plane quelconque (§ 64).

Les relations (15), (17) et (17') sont caractéristiques pour la spirale isogonale.

Mais ce n'est pas le même des relations (18), (18'). — En effet si l'on élimine $\operatorname{tg} \rho$ entre les équations (32) du § 32 et (18),

on trouve l'équation différentielle

$$\sin \theta \cot R = \sqrt{1 - R'^2} \cdot \cot R - \frac{R''}{\sqrt{1 - R'^2}},$$

dont l'intégration fait connaître la famille complète de lignes dans lesquelles le rayon de courbure et le rayon vecteur sont liés entre eux par la relation (18).

A cette famille de lignes appartient, *en particulier*, la spirale isogonale.

§ 41

Problème. — OA = R et OB = R₁ étant deux rayons vecteurs quelconques d'une spirale isogonale, déterminer l'arc AB, l'angle AÔB et l'aire du secteur AOB.

A) — Si l'on désigne par s, s₁ les arcs de la spirale compris entre l'origine et les points A, B, des relations

$$s = \frac{R}{\cos \theta}, \quad s_1 = \frac{R_1}{\cos \theta},$$

en supposant R₁ > R, on dérive la formule

$$(19) \quad \text{arc AB} = \frac{R_1 - R}{\cos \theta}.$$

B) — Les équations

$$\frac{dR}{\sin R} = \cot \theta \cdot d\omega, \quad \frac{dR}{\text{sh } R} = \cot \theta \cdot d\omega$$

que l'on tire de la relation (34) du § 34 et de son analogue du plan lobatschewskien, donnent par intégration

$$(20) \quad \text{tg } \frac{1}{2} R = c \cdot e^{\omega \cdot \cot \theta}$$

$$(20') \quad \text{th } \frac{1}{2} R = c \cdot e^{\omega \cdot \cot \theta}.$$

Telles sont les équations polaires des spirales isogonales non-euclidiennes.

En appliquant la relation (20) aux points A(R, ω), B(R₁, ω₁)

et en remarquant que $\widehat{AOB} = \omega_1 - \omega$, on trouve la formule

$$(21) \quad \widehat{AOB} = \operatorname{tg} \theta \cdot \log \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} R_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} R} \right),$$

valable dans le plan riemannien.

Dans le plan lobatschewskien elle est remplacée par l'autre

$$(21') \quad \widehat{AOB} = \operatorname{tg} \theta \cdot \log \left(\frac{\operatorname{th} \frac{1}{2} R_1}{\operatorname{th} \frac{1}{2} R} \right).$$

C) — En vertu de l'équation (24) du § 29, la différentielle dS de l'aire comprise entre un arc quelconque d'une spirale et les vecteurs extrêmes a pour expression

$$dS = \sin \theta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} \right) ds = \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} \right) \cdot dR.$$

Or comme l'on déduit d'ici par intégration

$$S = c - 2 \operatorname{tg} \theta \cdot \log \cos \left(\frac{R}{2} \right),$$

c étant une constante arbitraire, on a évidemment la formule

$$(22) \quad \text{Aire secteur } AOB = -2 \operatorname{tg} \theta \cdot \log \left(\frac{\cos \frac{R_1}{2}}{\cos \frac{R}{2}} \right)$$

et son analogue

$$(22') \quad \text{Aire secteur } AOB = -2 \operatorname{tg} \theta \cdot \log \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{R_1}{2}}{\operatorname{ch} \frac{R_2}{2}} \right).$$

§ 42

Applications. — 1° En désignant par C un autre point de la

spirale, correspondant au vecteur $OC = x$, la condition

$$\frac{AC}{CB} = \text{constante} = m$$

conduit à l'équation

$$x = \frac{R + mR_1}{m + 1}$$

que l'on peut employer pour partager un arc quelconque en deux parties, ayant entre elles un rapport donné.

En particulier le vecteur allant au milieu d'un arc quelconque est la moyenne arithmétique entre les vecteurs extrêmes.

2° Si le point C est fixé de façon qu'il soit

$$AC : CB = OA : OB,$$

son vecteur x vérifie la relation

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

On voit donc que le vecteur partageant un arc quelconque en deux parties proportionnelles aux vecteurs extrêmes est égal à leur moyenne harmonique.

3° En supposant que le vecteur $OC = x$ soit la bisectrice de l'angle $A\hat{O}B$, la relation (21) donne

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} R} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} R_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x},$$

d'où il suit

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} R \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} R_1}.$$

On conclut que : Dans une spirale isogonale $\left. \begin{array}{l} \text{riemannienne} \\ \text{lobatschewskienne} \end{array} \right\}$ la tangente $\left\{ \begin{array}{l} \text{circulaire} \\ \text{hyperbolique} \end{array} \right\}$ de la moitié du vecteur bisecteur de l'angle compris entre deux vecteurs quelconques, est la moyenne géométrique entre les tangentes $\left\{ \begin{array}{l} \text{circulaires} \\ \text{hyperboliques} \end{array} \right\}$ des moitiés de ces vecteurs.

4° Si le vecteur $OC = x$ partage le secteur AOB en deux parties égales, on déduit de la relation (22)

$$\frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{R}{2}} = \frac{\cos \frac{R'}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

et conséquemment

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\cos \frac{R}{2} \cdot \cos \frac{R'}{2}}.$$

On a donc la propriété : *Dans une spirale isogonale* $\left\{ \begin{array}{l} \text{rieman-} \\ \text{niennne} \end{array} \right\}$ *le cosinus* $\left\{ \begin{array}{l} \text{circulaire} \\ \text{hyperbolique} \end{array} \right\}$ *de la moitié du rayon vecteur partageant un secteur quelconque en deux parties égales, est la moyenne géométrique entre les cosinus* $\left\{ \begin{array}{l} \text{circulaire} \\ \text{hyperbolique} \end{array} \right\}$ *des moitiés des rayons vecteurs extrêmes.*

5° *Sur les plans non-euclidiens il y a une seule spirale isogonale passant par deux points A, B et ayant le pôle à un point donné O.*

Construisons en effet une spirale isogonale de pôle O, passant par A et inclinée sur les rayons vecteurs de l'angle θ satisfaisant à la relation (21). — Si B_1 est le point où elle coupe le vecteur OB, on doit avoir

$$(23) \quad \angle AOB = \operatorname{tg} \theta \cdot \log \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \angle OB_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} R} \right).$$

La comparaison des relations (21), (23) donne

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \angle OB_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} R_1$$

d'où il suit

$$\angle OB_1 = R, \quad \text{ou bien} \quad \angle OB_1 = R_1 + 2\pi.$$

Mais comme le deuxième cas revient au fond au premier, le point B_1 coïncide nécessairement avec B, et la spirale que l'on vient de construire passe aussi par le point B.

§ 43

Coordonnées intrinsèques. — Ce système de coordonnées est formé par le rayon de courbure ρ et l'arc s de la ligne, compté d'une origine arbitraire.

Sur les plans non-euclidiens une ligne est complètement déterminée, à tout mouvement près, par une relation finie quelconque entre ρ et s .

En effet si

$$\rho = f(s)$$

est une telle relation, en désignant par $d\varepsilon$ l'angle de contingence, on a les formules

$$d\rho = f'(s) \cdot ds, \quad d\varepsilon = \frac{ds}{f(s)}.$$

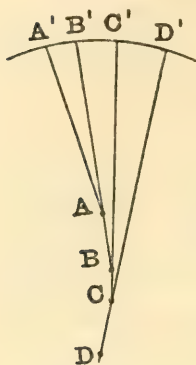


Fig. 24

Cela posé donnons à s une valeur particulière quelconque s_0 , et calculons la valeur correspondante de $d\varepsilon$

$$d\varepsilon_0 = \left[\frac{ds}{f(s)} \right]_{s=s_0}.$$

Décrivons deux droites A'A, B'A inclinées entre elles de l'angle infiniment petit $d\varepsilon_0$, prenons le segment

$$AA' = [f(s)]_{s=s_0} = \rho_0$$

et décrivons l'arc circulaire infiniment petit A'B' de centre A et de rayon AA'.

Prolongeons B'A du segment

$$AB = [f'(s) \cdot ds]_{s=s_0} = d\rho_0,$$

tirons la droite BC' inclinée sur BB' de l'angle B'BC égal à la valeur de $d\varepsilon$ successive à $d\varepsilon_0$, et décrivons l'arc circulaire B'C' de centre B et de rayon BB', arc qui reussira tangent à l'arc A'B' au point B', etc.

Si l'on perfectionne idéalement les constructions que l'on vient d'exposer, en les poussant avec la pensée jusqu'à la dernière limite d'exactitude, on a une infinité d'arcs circulaires infiniment petits A'B', B'C', C'D', enveloppant une ligne A'B'C'D', dont le rayon de courbure ρ est exprimable précisément par la fonction $f(s)$ de l'arc. — Remarquons que la

forme de cette ligne ne dépend nullement ni de la position du sommet A, ni de la direction du côtés AA' de l'angle initial A'ÂB', car si l'on fait de nouveau les constructions précédentes, en modifiant les conditions initiales, on obtient une nouvelle figure F' superposable à la figure primitive F. Et dans la superposition de ces figures égales F, F' la ligne nouvelle L' va coïncider avec la ligne primitive L, ce qui démontre bien leur identité.

Remarque. — Si L (A₁, A₂, A₃,) est une ligne tracée sur une surface *quelconque*, et L' (A'₁, A'₂, A'₃,) son évolue géodésiques, l'arc A_nA'_n de géodésique peut s'appeler le *rayon géodésique* de la ligne L au point générique A_n.

Or si l'on suppose que ce rayon géodésique *r* soit exprimé par une fonction connue de l'arc *s*, on peut démontrer, par une méthode analogue à la précédente, qu'il existe sur la surface une ligne dont le rayon géodésique est exprimé par la fonction donnée de l'arc. Mais dans le cas actuel l'application inconditionnée de la surface sur elle-même n'a pas lieu, en général; de sorte que la forme définitive de la ligne dépend soit de la position du point, soit de la direction de la droite d'où l'on initie la construction.

Autrement dit, la ligne ne résulte pas déterminée, dans un sens absolu.

§ 44

Coordonnées (R, θ). — Le rayon vecteur R et son inclinaison θ sur la ligne L (inconnue) soient liés par une des relations

$$(24) \quad R = f(\theta)$$

$$(25) \quad \theta = \varphi(R).$$

Dans le premier cas on a la formule

$$ds = \frac{dR}{\cos \theta} = \frac{f'(\theta)}{\cos \theta} \cdot d\theta,$$

d'où il suit par intégration

$$(26) \quad s + s_0 = \int \frac{f'(\theta)}{\cos \theta} \cdot d\theta,$$

*s*₀ étant une constante. — La ligne L est donc définie (en coordonnées radiales) par l'équation résultant de l'élimination de θ entre les équations (24), (26).

Dans le deuxième cas, en intégrant l'équation

$$ds = \frac{dR}{\cos \varphi(R)},$$

on trouve aussitôt l'équation de la ligne L (en coordonnées radiales) sous la forme

$$(27) \quad s + s_0 = \int \frac{dR}{\cos \varphi(R)}.$$

Autre méthode. — De la relation

$$(28) \quad \cos \theta = \frac{dR}{ds}$$

on tire

$$(29) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{ds^2 - dR^2}}{dR} = \begin{cases} \sin R \cdot \frac{d\omega}{dR} & (\text{dans le p. r.}) \\ \operatorname{sh} R \cdot \frac{d\omega}{dR} & (\text{dans le p. l.}) \end{cases}$$

Si donc on intègre l'équation résultant de l'élimination de θ entre les relations (25), (29), on trouve pour équation polaire de la ligne L:

$$(30) \quad \omega + \omega_0 = \int \frac{\operatorname{tg} \varphi(R)}{\sin R} dR \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(30') \quad \omega + \omega_0 = \int \frac{\operatorname{tg} \varphi(R)}{\operatorname{sh} R} dR \quad (\text{dans le p. l.}).$$

ω_0 étant une constante arbitraire.

En rappelant enfin la relation (28), l'analyse précédente démontre qu'une ligne plane non-euclidienne est déterminée de forme, aussitôt que l'on donne: 1° une relation finie entre R et θ ; 2° une relation finie entre R et $\frac{dR}{ds}$.

§ 45

Applications. — 1° Dans l'hypothèse $t = \text{constante} = a$, la première équation (34) du § 34 donne

$$(31) \quad ds = \operatorname{tg} a \cdot \cot R dR,$$

d'où il suit par intégration

$$\sin R = e^{\frac{s+s_0}{\operatorname{tg} a}},$$

s_0 étant une constante arbitraire.

Telle est l'équation de la tractrice polaire riemannienne, en coordonnées radiales⁽¹⁾.

Comme de la relation (31) mise sous la forme

$$\operatorname{tg} R = \operatorname{tg} a \cdot \frac{dR}{ds} = \operatorname{tg} a \cdot \cos \theta,$$

on tire

$$\theta = \varphi(R) = \arccos \left(\frac{\operatorname{tg} R}{\operatorname{tg} a} \right),$$

la formule (30) donne pour équation de la tractrice polaire riemannienne

$$\omega + \omega_0 = \frac{1}{\cos a} \int \frac{\sqrt{\cos^2 a - \sin^2 R}}{\sin^2 R} dR.$$

On a des équations analogues pour la tractrice polaire lobatschewskienne.

2° Si l'on suppose $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$ dans l'équation (10) du § 38, on trouve

$$\theta = \varphi(R) = \operatorname{arccot}(\cos R),$$

ce qui, en vertu de la relation (30), démontre que la ligne $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannienne} \\ \text{lobatschewskienne} \end{array} \right\}$ définie par l'équation polaire $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} R \\ \operatorname{th} R \end{array} \right\} = e^{\omega + \omega_0}$ jouit de la propriété caractéristique que son inclinaison sur le rayon vecteur, est complémentaire de l'inclinaison de son image euclidienne sur le vecteur correspondant.

§ 46

Coordonnées (p, R) , (q, R) . — Les perpendiculaires $OP = p$, $OQ = q$ abaissées de l'origine sur la tangente et la normale à

(1) On sait que l'équation de la tractrice polaire euclidienne est $R = e^{\frac{s+s_0}{a}}$.

un point quelconque A de la ligne L (inconnue) soient liées au rayon vecteur R par les relations

$$(32) \quad \sin p = f(R)$$

$$(33) \quad \sin q = F(R),$$

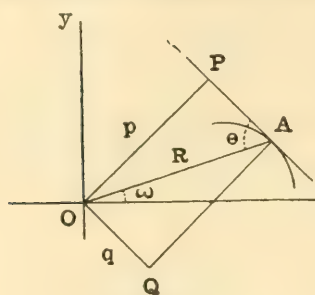


Fig. 25

f et F étant des symboles fonctionnels connus.

Or comme les triangles rectangles OAP, OAQ, si le plan est riemannien, donnent

$$(34) \quad \sin p = \sin R \cdot \sin \theta = \sin R \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}.$$

$$\sin q = \sin R \cdot \cos \theta = \sin R \cdot \frac{dR}{ds},$$

on a dans le premier cas

$$\frac{\sin R \cdot dR}{\sqrt{\sin^2 R - f^2(R)}} = ds,$$

d'où par intégration

$$(35) \quad \int \frac{\sin R \cdot dR}{\sqrt{\sin^2 R - f^2(R)}} = s + s_0.$$

Dans le deuxième cas

$$\frac{\sin R}{F(R)} \cdot dR = ds$$

et en intégrant

$$(36) \quad \int \frac{\sin R \cdot dR}{F(R)} = s + s_0,$$

s_0 étant une constante arbitraire.

Si au lieu des relations (32), (33) on a les autres

$$R = \varphi(\sin p), \quad R = \psi(\sin q)$$

résolues par rapport au rayon vecteur, le calcul est simplifié. En effet, en vertu des égalités (34), on peut écrire les rela-

tions

$$R = \varphi(\sin R \cdot \sin \theta), \quad R = \psi(\sin R \cdot \cos \theta),$$

et l'on tombe ainsi dans le cas des coordonnées R, θ (§ 44).

En résumant: *Sur les plans non-euclidiens toute relation finie entre p et R , ou entre q et R , définit sur une ligne.*

§ 47

Applications. — 1° Développante de cercle. En remarquant que la développante de cercle est caractérisée par la propriété que ses normales ont une distance constante au centre du cercle (pôle), on a la relation

$$\sin q = F(R) \sin m,$$

m étant une constante.

Il suffit donc d'appliquer la relation (36), pour voir que *la développante de cercle de rayon m , quand le pôle est au centre, est représentée (en coordonnées radiales) par l'équation*

$$\cos R = (s + s_0) \cdot \sin m \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$\text{ch } R = (s + s_0) \cdot \text{sh } m \quad (\text{dans le p. l.}).$$

Considérons maintenant le triangle rectangle AQO ayant pour sommets un point quelconque A de la ligne, le point correspondant Q de l'évolue et le pôle O. En remarquant que $AQ = \rho$, $OQ = m$, $OA = R$, on trouve que *la développante de cercle de rayon m est représentée (en coordonnées intrinsèques) par l'équation* (Voir le § 65)

$$\cos \rho = (s + s_0) \text{tg } m \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$\text{ch } \rho = (s + s_0) \text{th } m \quad (\text{dans le p. l.}).$$

2.° Développée de la spirale isogonale. L étant une spirale isogonale de pôle O, le centre de courbure correspondant à un point quelconque A de la ligne, est le point A_1 où la normale en A est reconstruite par la perpendiculaire $OA_1 = R_1$ élevée au pôle sur le rayon vecteur (§ 40).

Or si du point O on abaisse la perpendiculaire $OM_1 = p_1$ sur

clure que *la développée d'une spirale isogonale non-euclidienne n'est jamais une ligne de même famille* (1).

§ 48

Coordonnées (S, s) , (S, ρ) . — L'aire S comprise entre un arc arbitraire d'une ligne plane L (inconnue), l'arc correspondant de l'évolue et les rayons de courbure extrêmes, soit liée à l'arc s et au rayon de courbure ρ par les relations finies

$$(38) \quad S = f(s)$$

$$(39) \quad S = \varphi(\rho).$$

L'aire élémentaire dS peut être regardée comme un secteur circulaire infiniment petit de rayon ρ , et dont l'angle au centre $d\tau$ est défini par une des relations (§ 30)

$$d\tau = \begin{cases} \frac{ds}{\sin \rho} \\ \frac{ds}{\operatorname{sh} \rho} \end{cases},$$

suivant la nature du plan. — Or si le plan est riemannien, on a (§ 28)

$$dS = (1 - \cos \rho) \frac{ds}{\sin \rho} = \operatorname{tg} \left(\frac{\rho}{2} \right) \cdot ds,$$

de sorte que *la ligne cherchée L est définie (en coordonnées intrinsèques) par l'équation*

$$(40) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\rho}{2} \right) = f'(s).$$

Dans le cas de la relation (39) on a l'équation

$$\frac{\varphi'(\rho)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\rho}{2} \right)} d\rho = ds,$$

(1) Dans le plan ordinaire la spirale logarithmique a pour développée une autre spirale logarithmique.

d'où il suit par intégration

$$(41) \quad \int \frac{\varphi'(\rho)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\rho}{2}\right)} \cdot d\rho = s + s_0,$$

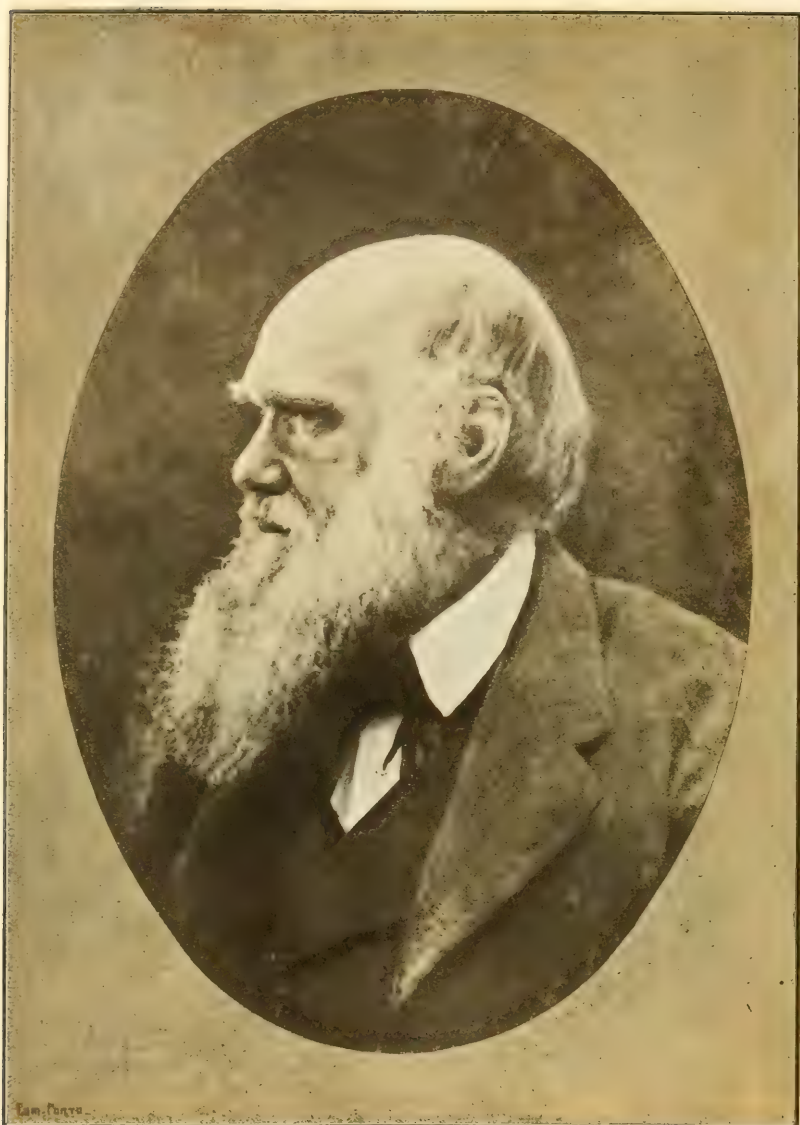
s_0 étant une constante arbitraire.

Telle est l'équation de la ligne cherchée, en coordonnées intrinsèques.

Dans le plan lobatschewskien subsistent des formules analogues.

Cette analyse démontre qu'une ligne non-euclidienne est complètement déterminée par une relation finie quelconque liant l'aire S à l'arc ou au rayon de courbure.

(A suivre.)



Charles Darwin

A COMMEMORAÇÃO DARWINEANA CELEBRADA PELA UNIVERSIDADE DE CAMBRIDGE

(22-24 DE JUNHO DE 1909)

POR

AARÃO FERREIRA DE LACERDA

O Senado da Universidade de Cambridge resolveu comemorar o centenario do nascimento de DARWIN (12 de fevereiro de 1809) e o quinquagesimo anniversario da publicação da *Origem das Especies* (24 de novembro de 1859). Em nome da Universidade, o seu Chancellor, Lord RAYLEIGH, convidou o Conselho da Academia Polytechnica do Porto a tomar parte nessa homenagem.

Gratamente accedeu ao convite o Conselho da Academia, que, para esse fim, me nomeou seu representante. Tive, pois, a honra, que tão reconhecidamente agradeço aos meus collegas, de poder assistir, como delegado da Academia Polytechnica, á Commemoração darwineana celebrada em Cambridge (22-24 de junho de 1909).

Do que se passou naquelles memoraveis dias vimos dar uma resumida noticia, recordando, ao mesmo tempo, alguns traços da biographia scientifica do grande naturalista inglez. Subsequentemente, em um outro artigo, diremos quaes os progressos realizados na theoria da descendencia depois da publicação da *Origem das Especies*.

Seja-nos permitido desde já agradecer ao *Master* e aos *Fellows* do *Pembroke College* a generosa hospitalidade que alli recebemos durante os dias da Commemoração, e, egualmente, ma-

nifestar o nosso reconhecimento a FRANCIS DARWIN por nos ter enviado, a nosso pedido, o retrato de seu illustre pae, com a permissão de o reproduzir nestes *Annaes*.

I

A Commemoração darwineana constou essencialmente de tres solemnidades: a entrega das mensagens, o banquete universitario e a cerimonia da investidura dos novos doutores em sciencia *honoris causa*.

A 22 de junho, á noite, o Chancellor da Universidade de Cambridge, Lord RAYLEIGH, recebia os delegados scientificos no *Fitzwilliam Museum*. As telas magistraes, que em tão grande numero se podem admirar nos salões d'esse notavel museu, contribuiam a formar um scenario adequado á magnificencia da recepção. A extraordinaria diversidade e numero de vestuarios academicos davam immediatamente a impressão de que dos differentes paizes do mundo culto tinham acudido representantes de corporações scientificas para se associarem á homenagem que a Universidade ia prestar á memoria de CARLOS DARWIN.

*

No dia seguinte (23) realisou-se, na *Senate House*, a solemnidade da entrega das mensagens. A cerimonia foi feita com a maior simplicidade; dava-lhe, porém, uma excepcional grandeza a circumstancia de que, entre os numerosos delegados de institutos scientificos, que alli se reuniam, se encontrava a maior parte dos grandes biologistas contemporaneos.

Estavam representadas 243 instituições scientificas.

Dos delegados, 76 pertenciam ás Ilhas Britannicas, e entre estes estavam: ARCHIBALD GEIKIE, LAUDER BRUNTON, RAY LANKESTER como representantes da Sociedade Real de Londres; FRANCIS DARWIN como representante (presidente) da Associação Britanica; Lord AVEBWRY como representante do Museu Britannico (Historia natural), e POULTON da Universidade de Oxford. Os Estados Unidos enviaram 30 delegados, entre os quaes JACQUES LOEB, E. WILSON e HENRY OSBORN. A Allemanha tambem se fazia representar por uns 30 delegados, entre os quaes estavam WALDEYER, DIELS, ENGLER e O. HERTWIG, como representantes da Academia Real das Sciencias da Prussia; SCHULTZE da Universidade de Bonn; BUTSCHLI, de Heidelberg; e ainda MAX VERWORN, ROBERT WIEDERSHEIM, THEODOR BOVERI. Entre os repre-

sentantes da Austria-Hungria estavam S. APATHY, JULES DOLLINGER, LUDWIG VON GRAFF, FRANZ STEINDACHNER. Entre os representantes holandeses via-se HUGO DE VRIES, e entre os belgas E. VAN BENEDEN.

A Universidade de Paris enviou F. LE DANTEC; o Instituto de França teve como representantes EDMOND PERRIER e o Principe ROLAND BONAPARTE; o Instituto Pasteur de Paris foi representado por METCHNIKOFF. Entre os representantes suecos estavam SVANTE ARRHENIUS, director do Instituto Nobel e ALFRED NATHORST de Stockolmo; entre os suissos, R. CHODAT, reitor da Universidade de Genebra; entre os russos, C. TIMIRIAZEFF da Sociedade Imperial dos naturalistas e da Universidade de Moscow. Entre os representantes italianos estavam o Marquez de SAN GIULIANO, embaixador de Italia em Londres (*Società Geographica Italiana*) e o Conde UGO BALZANI (*Accademia dei Lincei*). A Universidade Central de Hespanha (Madrid) teve como delegado o professor BOLIVAR.

Houve um motivo grave que impediu a viagem do delegado da Universidade de Coimbra, o nosso mestre e amigo, dr. JULIO HENRIQUES. Foi substituído o dr. PINTO BASTO. A Sociedade de Geographia de Lisboa foi representada por SILVA TELLES.

Além dos delegados das corporações scientificas, a Universidade recebia ainda 187 hospedes em cuja lista se viam os nomes de: JOSEPH HOOKER, um dos mais illustres amigos de DARWIN; R. MELDOLA; NORMAN LOCKYER, director do Observatorio de physica solar, South Kensington; H. ASQUITH, primeiro ministro de Inglaterra; professor J. W. JUDD; Duque de NORTHUMBERLAND, presidente da Royal Institution; ARTHUR J. BALFOUR; A. C. DE CANDOLLE, Genebra; Lord Bispo de Ely; G. KIEBS, da Universidade de Heidelberg; Lord FARRER; Lord MANNERS; H. MIERS, principal da Universidade de Londres; Lord MORLEY, secretario de estado da India; Lord COLLINS; Lord WALSHINGHAM; Lord WEARDALE; e numerosos representantes das familias de DARWIN e WEDGWOOD, etc.

HAECKEL e WEISMANN não estiveram presentes, tendo no entanto enviado a desculpa da ausencia pela sua avançada idade.

Havia ainda representantes da Dinamarca, Noruega, Japão e das colonias britannicas (India, Australia, Canadá, Cabo, etc.).

O Lord Chancellor abrindo a sessão, saudou os delegados. Depois, continuando, disse que todos os que possuíssem espirito scientifico admiravam DARWIN e, todos os que o conheciam, profundamente o estimaram. Era um prazer e um estimulo pensar em DARWIN que, não obstante a sua falta de saude,

trabalhou sempre, exercendo do seu retiro uma influencia quasi sem igual nas ideias do seu tempo.

RAYLEIGH terminou exprimindo o desejo de que fosse creada em Cambridge uma cadeira onde fossem especialmente versados os problemas relativos á hereditariedade, assumpto que é intimamente associado ao nome de DARWIN e de seu primo FRANCIS GALTON.

Depois principiou a entrega das mensagens. Era lido em voz alta o nome de cada corporação scientifica e o do delegado que a representava. Este, em seguida, entregava ao Chancellor a mensagem de que era portador. As manifestações de applauso e sympathia da brilhante assembléa, que tão imponente tornava o aspecto da ampla sala da *Senate House*, acompanharam sempre a entrega de cada *Address*.

Como delegado da Academia Polytechnica, tivemos, por nossa vez, a honra de entregar a seguinte mensagem:

Ad Cantabrigiensem Universitatem Academia Polytechnica Portucalensis.

Cantabrigiensis Universitatis invitatio, ut in centesimo anno celebrando, ex quo DARWIN natus est, ac simul quinquagesimo, ex quo ejus opus, Origin of Species, nomine insignitum, in lucem prodit, Academia Polytechnica Portucalensis per legatum adesset, nobis pergrata fuit, magnum enim decus atque honorem accepimus; et praeierea ad significandum quam ardenti studio effusoque pectore insignem rerum naturae scrutatorem miramur ac colimus, admodum opportuna.

Jure ac merito Britanni cives incliti sapientis cineres in Pantheon, ubi tot praestantissimi suae gentis viri requiescunt, juxta NEWTON condere statuerunt, DARWIN est enim Britanniae decus ac perennis gloria!

Haud facile reperiuntur viri aequae sollertes ac DARWIN, qui rerum naturae leges perspicere, inspicere ac patefacere possint; et, quaecunque sint fata, quae hujus cl. viri doctrinae occurrant, haud tamen dubium est quin, tot accuratissimis observationibus innixa atque adeo perspicaci ingenio suffulta, in summo scientiae culmine praefulgeat atque omnes aevos superet.

Hac de re colendissimae Universitati Cantabrigiensi vehementer gratulamur, atque a D. O. M. etiam atque etiam petimus, ut Institutum vestrum in pristino splendore aeternum maneat.

Apud Academiam Polytechnicam Portucalensem prid. k. mai 1909.

Acad. Polyt. Portuc. nomine

(a) FRANCISCO GOMES TEIXEIRA.

Houve tres turnos de entrega de mensagens, seguindo se as nacionalidades por ordem alphabetica. Nos intervallos e no fim, falaram successivamente OSCAR HERTWIG (Berlin), METCHNIKOFF (Paris), OSBORN (New York) e RAY LANKESTER (Oxford).

HERTWIG lembrou que, em honra de DARWIN, já este anno tinham sido celebradas commemorações em Hamburgo, Munich, Francfort e outras cidades germanicas, e que a noção evolucionista se tornou predominante na biologia allemã, tendo HAECKEL concorrido muito para que desde o principio se divulgasse.

METCHNIKOFF, falando em nome do Instituto Pasteur de Paris, mostrou a grande influencia que tem tido os conceitos darwinianos no desenvolvimento da pathologia comparada, novo ramo da biologia, que já tem esclarecido o mechanismo de alguns processos morbidos pelo estudo dos phenomenos similares na serie ascendente dos organismos.

OSBORN lembrou as glorias de Cambridge e a util influencia da sua Universidade na vida scientifica da America; por seu turno os sabios americanos, como, por exemplo, pelos seus estudos sobre os fosseis, COPE e MARSH, já tem descoberto novos e valiosos elementos comprovativos da theoria da descendencia. OSBORN terminou dizendo que os delegados americanos e alguns amigos desejavam offerecer ao *Christ's College* um busto em bronze de DARWIN, trabalho do seu patricio WILLIAM COUPER.

RAY LANKESTER, no seu discurso, referiu-se aos pontos mais discutidos da doutrina transformista, affirmando que em todas as questões fundamentaes eram as opiniões de DARWIN que ainda prevaleciam depois de 50 annos de exame e experiencias e a despeito de todas as tentativas para as lançarem por terra. DARWIN estudou com toda a attenção as variações consideraveis e rapidas e as variações minimas e lentas, dando a estas segundas muito maior importancia no conceito da evolução. Além d'isso igualmente attendeu muito á significação dos factos da herança em relação á fecundação cruzada das variedades cultivadas, especialmente sob o ponto de vista do grau de fusão dos caracteres ou do seu predominio. Acerca das leis de MENDEL, disse tambem RAY LANKESTER a sua opinião: essas leis, se tivessem sido conhecidas por DARWIN, deviam interessal-o vivamente, porque concorrem ao esclarecimento do mechanismo da transmissão hereditaria; contudo, em nada alteram os principios em que elle fundamentou a doutrina da descendencia.

Com o discurso de LANKESTER terminou esta solemndade, que ficará inolvidavel para todos os que a ella tiveram a felicidade de assistir.



No banquete realisado (23, á noite) em uma sala universitaria, *New Examination Rooms*, houve dois discursos em homenagem á memoria de DARWIN, o de A. J. BALFOUR e o de SVANTE ARRHENIUS.

O discurso elegante e fluentissimo do considerado estadista BALFOUR a todos impressionou pela sua clareza e elevação. Duas circumstancias o auctorisavam a usar da palavra naquelle momento, a mais profunda affeição pessoal e a mais illimitada admiração pelo assumpto, e, além d'isso, a sua dedicação á Universidade de Cambridge. Lembra que na 17.^a-18.^a centuria esta Universidade se orgulha com NEWTON, e que no seculo XIX educou YOUNG, KELVIN, MAXWEL, STOKES... Houve, porém, um discipulo de Cambridge que, trabalhando em um outro dominio de investigação scientifica, imprimiu indelevel sello em toda a esphera do desenvolvimento da actividade pensante. Foi DARWIN. Não modificou sómente as nossas ideias sobre a evolução biologica, modificou tambem as ideias correntes sobre a historia, a sociologia e a politica. Além dos seus estudos sobre a evolução, um outro facto devia ser posto em relevo. O seu grande poder de observação e a sua extraordinaria capacidade para generalizar com largueza e segurança tornaram-n'o mestre em todas as sciencias naturaes — geologia, botanica, zoologia e anthropologia. Não houve na historia da sciencia um genio, concluiu BALFOUR, cuja memoria uma grande Universidade possa celebrar com mais orgulho e que melhor mereça a homenagem calorosa dos representantes dos grandes centros do saber.

SVANTE ARRHENIUS, falando em seguida, recorda os nomes de LAMARCK, ERASMUS DARWIN, WALLACE, HERBERT SPENCER, HUXLEY e HAECKEL. Refere-se á amplidão dos conceitos de DARWIN e á base evolutiva sobre a qual assentam hoje tão variadas sciencias sociaes, desde a historia cultural do espirito até á criminologia. Mesmo os theologos, que a principio olhavam receosos para as novas ideias, principiam a estudal-as com attenção, comprehendendo o seu valor. Na familia DARWIN vê se um brilhante exemplo da herança de qualidades intellectuaes. ARRHENIUS lembra a esse respeito os trabalhos em astronomia de GEORGE DARWIN. Conclue, dizendo que a doutrina da evolução concorre poderosamente para a manutenção da paz entre as nações civilisadas.

W. ERASMUS DARWIN, o filho mais velho de DARWIN, agradeceu, narrando depois, no seu discurso, algumas particularidades extremamente interessantes da vida intima de seu pae. Em seguida o professor E. POULTON, de Oxford, brindou a Cambridge. O

banquete terminou pelo brinde de agradecimento a todos os que se associaram á Commemoração, brinde que foi levantado pelo Rev. MASON, Vice-chancellor da Universidade de Cambridge.

Um telegramma foi enviado a ALFRED RUSSEL WALLACE lembrando os seus grandes trabalhos associados ao motivo da Commemoração que se celebrava, e lamentando que elle não pudesse estar presente.

Ao levantar do banquete, o Rev. MASON, recitou a breve phrase de oração de graças.

*

O *Master* e os *Fellows* do *Christ's College* (residencia de DARWIN como alumno) e egualmente o *Master* (que tambem na occasião era Vice-chancellor da Universidade) e os *Fellows* do *Pembroke College* offereceram respectivamente aos delegados duas festas intimas nos jardins e claustros dos seus collegios.

II

Na quinta feira (24) foram investidos nos seus graus os novos doutores honorarios. A cerimonia realisou-se na *Senate House*. Na sala estavam as auctoridades e professores universitarios e os delegados e hospedes da Commemoração darwineana. O orador universitario fazia successivamente o elogio de cada doutor. Depois tomava-lhe a mão, levando-o á presenca do Chancellor que se limitava a pronunciar as palavras sacramentaes, cumprimentando em seguida o novo investido.

Foram em numero de 21 os doutores em sciencia *honoris causa* a quem foi conferido o grau naquella dia. Eram quasi todos naturalistas eminentes. Limitar-nos-hemos a citar-lhes os nomes, apenas mencionando respectivamente os seus principaes trabalhos, recordados por J. SANDYS, o orador official naquella solemnidade. Receberam aquelle testemunho de consideração: JACQUES LOEB, professor de physiologia na Universidade da California, que conseguiu obter o desenvolvimento embryonario em ovulos não fecundados de echinodermes, pela modificação da composição salina da porção de agua do mar em que estavam mergulhados, ou por meio d'uma infusão de sangue; HUGO DE VRIES, professor de botanica em Amsterdam que, principalmente pelas variedades da *Oenothera*, que conseguiu desenvolver, chegou á celebre theoria que tanta impressão tem produzido, de que a transformação das especies se não faz somente por fluctuações insensíveis, mas tambem por mutações

bruscas; EDMUND WILSON, professor de zoologia na *Columbia University*, New York, que observou que em certos insectos o sexo é determinado pela presença ou ausencia de um determinado fragmento nuclear; VAN BENEDEK, cytologista e embryologista, professor de zoologia em Liège, que escreveu a memoria classica sobre a *Ascaris megalcephala*; R. CHODAT, professor de botanica e reitor da Universidade de Genebra, que tem esclarecido o papel dos fermentos oxydantes, e estudado a flora das algas microscopicas dos lagos suissos, sendo além d'isso uma auctoridade na botanica systematica; BUTSCHLI, professor de zoologia e de paleontologia em Heidelberg, conhecido pelos seus estudos ácerca dos protozoarios e sobre as bacterias; FRANCIS DARWIN, antigo presidente da Associação Britannica, que collaborou nos trabalhos de seu pae, nas suas ultimas investigações botanicas (faculdade motriz das plantas), em Down; EDMOND PERRIER, director do Museu de Historia Natural de Paris, o auctor do brilhante trabalho de philosophia zoologica — *Les colonies animales et la formation des organismes*, e que tanto correu para o resultado das explorações submarinas do *Travailleur* e *Talisman*; MAX VERWORN, professor de physiologia em Göttingen que tem esclarecido a relação entre a physiologia geral dos organismos e as propriedades fundamentaes da cellula; CHARLES ZEILLER, professor de paleobotanica na Escola de Minas de Paris, que tem augmentado o nosso conhecimento da leis da evolução, estudando as plantas fosseis da Africa, America do Sul, India e Asia Menor; CHARLES WALCOTT, secretario do *Smithsonian Institute* em Washington, uma auctoridade no conhecimento da fauna do cambreano; KARL GOEBEL, professor de botanica em Munich que tem estudado as fórmulas das plantas em relação á hereditariedade e acção do meio, e que, além d'isso, fez importantes excursões botanicas na India, Ceylão, Java, Venezuela, Guyana ingleza, e ainda na Australia e Nova Zelandia; LUDWIG VON GRAFF, professor de zoologia e de anatomia comparada na Universidade de Gratz e presidente eleito do Congresso Internacional de zoologia de Gratz, auctor de notaveis estudos sobre os turbellariados; R. HERTWIG, professor de zoologia e anatomia comparada em Munich, que além dos trabalhos feitos de collaboração com seu irmão, sobre alguns celenterados, sobre o celoma e sobre cytologia, estudou, independentemente, a estrutura e vida dos protozoarios, e, tambem, a morphologia dos radiolarios e actiniarios da expedição do *Challenger*; HAROLD HOFFDING, professor de philosophia em Copenhague; CLEMENT TIMIRIAZEFF, professor de botanica em Moscow, conhecido pelos seus estudos sobre a chlorophylla;

FRANTISEC VEJDOWSKY, professor na Universidade bohemia de Praga; o Principe ROLAND BONAPARTE; e, finalmente, HERMANN VOCHTING, professor de botanica em Tübingen que se tem dedicado a estudos sobre a faculdade motriz no reino vegetal, sobre os processos de regeneração dos órgãos nas plantas que soffreram mutilações e, ainda, ácerca dos phenomenos phytopathologicos considerados sob o ponto de vista da hereditariedade.

*

Em seguida á cerimonia dos graus, ARCHIBALD GEIKIE, presidente da Sociedade Real de Londres, fez uma notavel conferencia subordinada ao thema — *Darwin considerado como geologo*.

Vamos dar a summa do discurso de GEIKIE, porque desejamos mostrar o alto valor dos trabalhos geologicos de DARWIN, affirmado por uma das primeiras auctoridades scientificas contemporaneas.

No tempo em que DARWIN iniciou os seus estudos, a geologia estava ainda em um estado cahotico. Os geologos neptunistas e os vulcanistas formavam duas escolas differentes. Por seu turno os vulcanistas dividiam-se em catastrophistas ou convulsionistas e uniformistas.

O primeiro volume dos *Principios de Geologia* de LYELL, onde se refutavam os principios da escola convulsionista, foi estudado com toda a attenção por DARWIN durante o primeiro tempo da viagem a bordo do *Beagle*. Esse livro, como depois todos os trabalhos de LYELL, de quem DARWIN, mais tarde, foi intimo amigo, poderosamente influiram no seu espirito. Não poudo fazer observações na occasião da passagem por Teneriffe, porque não foi permittido o desembarque. Logo, porém, nas explorações que realisou nas ilhas de Cabo Verde, encontrou justificadas as doutrinas de LYELL.

GEIKIE dividiu em quatro grandes capitulos os estudos geologicos, que mais especialmente chamaram a attenção de DARWIN, durante a viagem do *Beagle*: a historia dos vulcões, os movimentos lentos da crusta terrestre, a geologia da America do Sul, e a acção dos agentes de denudação.

DARWIN estudou as manifestações do vulcanismo e as formações a que dá origem nos Andes e em muitas das ilhas que visitou. Observou cuidadosamente a occorrencia de camadas de conchas marinhas e massas de chloreto de sodio e gesso intercaladas entre antigas lavas, factos que considerou provarem o levantamento do fundo maritimo. Colheu um numero extraor-

dinario de exemplares petrographicos e determinou com rigor a sua classificação. Notou o phenomeno da laminação que, em certas condições, se offerece nas lavas e a analogia que existe entre essa estructura e a d'algumas rochas crystallophylicas da serie antiga. Descreveu com minuciosidade a constituição lithologica de muitas ilhas vulcanicas, sendo muito notavel, entre outros, o estudo petrographico da Ilha da Ascensão, que é considerado classico.

Foi DARWIN o primeiro observador que, em uma extensissima área, teve occasião de se dedicar ao estudo directo e comparativo dos lentos movimentos da crusta terrestre. No littoral do Brazil, do Uruguay, nos terrassos da Patagonia, e ainda na costa occidental da America, entre as latitudes de $46^{\circ} 35'$ e de 12° S, notou signaes que o levaram a admittir um movimento intermittente, longamente continuado, de elevação d'essas regiões: «diariamente o geologista é forçado a ver que nem mesmo o vento que sopra é tão instavel como a crusta terrestre».

Ainda, durante a viagem do *Beagle*, teve DARWIN occasião de estudar os movimentos da superficie da terra, sob uma fôrma diversa.

Vendo que as formações coralliaras se continuavam verticalmente muito abaixo do nivel em que podiam trabalhar os coraes vivos, DARWIN formulou uma hypothese que, não só explicava esse facto, como tambem a transformação possivel dos recifes costeiros em recifes barreiras, e d'estes em ilhas lagoas. DARWIN via nesses phenomenos a prova de que havia um abaixamento lento do fundo dos Oceanos Pacifico e Indico, em determinadas regiões.

A theoria de DARWIN foi durante muito tempo accete pela maioria dos geologos. Depois foi demonstrado, pelos estudos que se fizeram nos recifes de coral da Florida (LUIZ AGASSIZ), das Ilhas Pelew (prof. SEMPER), e de muitas ilhas do Pacifico, Oceanos Indico e Atlantico occidental (JOHN MURRAY, ALEXANDRE AGASSIZ, dr. GUPPY) que a theoria do abaixamento não é de applicação geral. Muitas vezes mesmo a formação dos recifes se dá parallelamente a um levantamento lento do sólo. GEIKIE, porém, não duvida de que para muitos recifes é ainda verdadeira a explicação dada por DARWIN.

Nas travessias que realisou nos Andes «sob uma atmosphera resplandecente, entre as encostas abruptas das montanhas, absolutamente privadas de vegetação, poudes averiguar os variados grupos de rochas fundamentaes com que foi construida a cadeia gigante da Cordilheira». Fez, além d'isso, o estudo de extensos terrenos sedimentares, sendo o primeiro naturalista

que deu conhecimento da variedade e extraordinaria abundancia de vertebrados fosseis nos depositos da Patagonia.

DARWIN observou tambem em larga escala o dynamismo dos grandes factores externos, que permanentemente modificam, actuando em sentido centripeto, a esculptura da crusta do globo.

DARWIN voltou para Inglaterra em 1836. Além dos trabalhos que publicou ácerca das observações colhidas durante a viagem, ainda, até 1855, fez alguns estudos especiaes de geologia, entre os quaes convém mais especialmente citar os que se referem aos phenomenos glaciarios em Inglaterra.

Já neste ultimo tempo a actividade scientifica de DARWIN era quasi exclusivamente concentrada em assumptos biologicos. Affirma porém GEIKIE que os capitulos relativos a geologia que se leem na *Origem das Esppecies*, lhe pareceram sempre a mais importante contribuição de DARWIN ao estudo d'aquella sciencia. Com effeito, encontram-se alli logicamente deduzidos os principios fundamentaes que a paleontologia fornece á chronologia estratigraphica, e que permitem tambem relacionar a antiga distribuição dos organismos com a sua distribuição geographica actual. No emtanto, a theoria da descendencia, não obstante estar em tão perfeita harmonia com a doutrina da uniformidade no systema de causas geologicas, encontrou notaveis adversarios mesmo entre os principaes uniformistas. Assim, LYELL manifestou-se, durante muito tempo, antagonista da noção da mutabilidade das especies. Pouco a pouco, depois, o grande geologo se convenceu do valor da doutrina do desenvolvimento organico progressivo. A sua conversão definitiva vem exarada somente na decima e ultima edição dos seus Principios. «O corajoso abandono d'uma opinião, que tinha sido proclamada durante um tão longo tempo da existencia, foi da parte de LYELL um nobre exemplo de abnegação, na causa da verdade».

O ultimo livro publicado por DARWIN, *O papel dos vermes na formação da terra vegetal*, foi ainda dedicado a um assumpto geologico. Esse trabalho, fructo de uma longa e escurpulososa observação occupa um lugar especial entre as modernas contribuições ao problema da denudação, podendo servir de modelo a determinados estudos de geologia experimental.

GEIKIE, concluindo, prestou o seu tributo de reconhecimento e admiração á memoria de CARLOS DARWIN: os seus grandes trabalhos de geologia por tal fórma tinham permeado inteiramente a recente litteratura scientifica, que os estudiosos corriam o risco de lhes perder de vista a origem, tão intimamente incor-

porados se encontravam nos conhecimentos actuaes. Com orgulho, os geólogos consideravam DARWIN um dos seus maiores mestres: a sua obra tinha marcado uma notavel epocha de progresso na sua sciencia favorita.

GEIKIE annunciou tambem que a Sociedade Real tinha mandado cunhar uma medalha d'ouro «a copy of the DARWIN Medal», e a offerecia á Universidade de Cambridge.

Com a conferencia de ARCHIBALD GEIKIE terminou a commemoração universitaria.

Algumas horas depois os delegados e hospedes universitarios iam apresentar os seus cumprimentos de despedida á illustre Familia DARWIN, que amavelmente os convidára para um *Garden Party* no *Trinity College*.

A Sociedade Real convidou os delegados para a sessão que nas suas salas foi realisada nessa noute (24) em Londres. Não pudémos assistir. Consta-nos que foi extremamente interessante.

III

Os Syndicos da Imprensa universitaria de Cambridge offereceram aos delegados o seguinte livro publicado sob os cuidados de FRANCIS DARWIN: *The Foundations of the Origin of Species, a Sketch written in 1842*. Nesse esboço, escripto 17 annos antes da publicação da *Origem*, CARLOS DARWIN mostra conhecer com toda a clareza, nas suas linhas essenciaes, os factos de variação nos animaes domesticos e a accumulção d'essas variações sob a influencia da selecção: a provavel applicação d'esses principios aos animaes selvagens, sendo assim possivel a producção de novas raças, cujos caracteres successivamente se affastem dos da especie primitiva; o parallelismo d'alguns phenomenos relativos ao desenvolvimento embryonario dos seres pertencentes ao mesmo typo de organização; a fragmentação dos archivos geologicos; o theor das provas que a paleontologia e a geographia dos seres vivos e fosseis fornecem á hypothese da descendencia, e, sob este ponto de vista, a relação que existe entre as plantas e animaes das regiões elevadas das montanhas e os que habitam as altas latitudes.

DARWIN informa na sua autobiographia que em junho de 1842 escreveu a lapis um breve esboço da sua theoria, em 35 paginas. Dois annos depois, em 1844, desenvolvia o mesmo assumpto em um manuscripto de 230 paginas. É o primeiro d'estes ensaios que FRANCIS DARWIN editou por occasião da Com-

memoração. Como acabamos de ver, as *Foundations* constituem um precioso documento para a historia da sciencia.

FRANCIS DARWIN em uma curta introdução com que faz preceder as *Foundations* indaga em que tempo, pela primeira vez, se definiu no espirito de seu pae a noção transformista. Diremos resumidamente algumas considerações que FRANCIS DARWIN faz a tal respeito.

CARLOS DARWIN tinha lido com muita attenção o primeiro volume dos *Princípios de Geologia* de LYEEL (publicados em 1830). A doutrina do uniformismo geologico de LYEEL conduzia logicamente á theoria da descendencia, não obstante o proprio LYEEL ainda nesse tempo estar muito longe de reconhecer a necessidade d'essa consequencia, e mesmo depois, durante um longo periodo, a combater.

Houve, porém, outras circumstancias que chamaram a attenção de DARWIN, ácerca da mutabilidade das especies. Na sua autobiographia, escreveu: «Durante a viagem do *Beagle* impressionou-me profundamente, — 1.º o ter descoberto na formação pampeana grandes animaes fosseis ⁽¹⁾ cobertos com uma armadura semelhante á dos tatús actuaes; 2.º a maneira como, á medida que se caminha para o sul no continente americano, se substituem umas ás outras, especies animaes intimamente relacionadas; 3.º o character sul-americano da maior parte dos seres do archipelago de Galapagos e mais especialmente o modo segundo o qual differem ligeiramente em cada ilha do grupo, nenhuma d'essas ilhas parecendo ser muito antiga sob o ponto de vista geologico. Era evidente que taes factos e muitos outros só podiam ser explicados admittindo a hypothese de que as especies gradualmente se modificavam; e o assumpto preoccupava-me».

(1) «Dispuz da maior parte das minhas collecções, dando todos os ossos fosseis ao *College of Surgeons*...» (CARLOS DARWIN). A este respeito escreve FRANCIS DARWIN: «É preciso notar que, nesta epocha, os unicos mamíferos descriptos de especies extinctas, provenientes da America do Sul, eram o Mastodonte (3 especies) e o *Megatherium*. Os restos d'alguns desdentados extinctos pertencentes á collecção de sir WOODBINE PARISH não tinham sido descriptos. Os exemplares de meu pae comprehendiam (além dos *Toxodon* e *Scelidotherium*), restos de *Mylodon*, de *Glossotherium*, d'outro animal gigantesco parente do Formigueiro, e de *Macrauchenia*. A descoberta d'estes restos tem o seu interesse proprio, mas, além d'isso, tem uma importancia particular, como ponto de partida na existencia de meu pae, porque a viva impressão experimentada, quando elle mesmo os exhumou, foi uma das causas principaes dos seus ultiores estudos sobre a origem das especies (*Vida e correspondencia de Darwin*, tr. fr., vol. 1.º, pag. 318).

Essas ideias só pouco a pouco se foram definindo e tomaram maior vulto. No seu *Pocket Book*, em data de 1837, escreveu DARWIN: «Em julho abri o meu primeiro livro de notas ácerca da transmutação das especies». Comtudo não se convenceu completamente da mutabilidade especifica antes de poder formular com clareza o conceito do mechanismo da selecção natural, isto é em 1838-1839.

Em outubro de 1838 leu DARWIN, casualmente, o *Ensaio sobre a população* de Malthus. Referindo-se a essa leitura diz-nos, na autobiographia: «estando bem preparado por uma longa e incessante observação dos habitos dos animaes e plantas para apreciar a lucta pela existencia, que por toda a parte se dá, notei que sob determinadas circumstancias as variações favoraveis seriam preservadas, e as desfavoraveis tenderiam a ser destruidas. O resultado seria a formação de novas especies».

Comtudo, já em 1837, DARWIN, no seu livro de notas, se referia ao principio de que «as variações permanentes produzidas ou pelo isolamento dos grupos, ou pela mudança de circumstancias, se accentuavam em harmonia com a adaptação a essas circumstancias», extinguindo-se as fórmas não adaptadas.

D'aqui deprehende, com segurança, FRANCIS DARWIN, que o conhecimento que seu pae tinha da «subordinação reciproca dos organismos, e da tyrannia das condições» o teria levado a completar os delineamentos da sua theoria ácerca dos effeitos da selecção natural, como fructo da propria observação, e sem a casual e leve suggestão do livro de MALTHUS.

FRANCIS DARWIN tem sido incansavel em reunir os elementos para o perfeito conhecimento da vida e trabalhos de seu pae. Publicou primeiramente (1887) *The life and Letters of Charles Darwin*, incluindo um capitulo de autobiographia, tres volumes (de que existe uma traducção franceza), depois em 1902 editou o livro *Charles Darwin*, e, em 1903, juntamente com SEWARD, publicou ainda uma nova serie de cartas—*More Letters of Charles Darwin*, dois volumes.

Estiveram em exposição, durante os dias da Commemoração centenaria, os originaes de muitas d'essas cartas, escolhidas na extensa correspondencia que CARLOS DARWIN assiduamente manteve com alguns dos primeiros geologos e biologistas do seu tempo; muitos dos manuscriptos scientificos que redigiu: colleções de historia natural feitas durante a viagem do *Beagle*; os seus retratos; os livros mais interessantes que possuia; emfim, tudo quanto podia concorrer a documentar as phases das diversas fórmas de actividade scientifica em que se absorveu uma tão laboriosa existencia.

IV

CARLOS ROBERTO DARWIN nasceu em Shrewsbury a 12 de fevereiro de 1809. Era filho de um medico muito distincto, o dr. ROBERTO DARWIN, e neto de ERASMO DARWIN, poeta e philosopho, autor da *Zoonomia* ou leis da vida organica, onde se mostra um notavel precursor da theoria da evolução.

A partir de outubro de 1825, frequentou CARLOS DARWIN a Universidade de Edimburgo, durante dois annos. O seu estagio universitario em Cambridge, no *Christ's College*, começou em 1828, obtendo o diploma de *Bachelor of Arts* em janeiro de 1831.

Pouco ha a notar na vida de DARWIN como alumno. Os principaes capitulos das sciencias naturaes ainda nesse tempo estavam pouco mais do que na sua phase embryonaria, e, por isso, o seu estudo didactico ou consistia na demonstração de hypotheses demasiadamente simplistas, por se basearem em um numero insufficiente de factos, ou se mantinha em um campo meramente descriptivo. Não admira pois, que elle por vezes julgasse os cursos fastidiosos, e que mostrasse a sua futura tendencia quasi sómente no vivo interesse com que já então fazia collecções respeitantes á historia natural. De resto, era um adolescente fogoso, estimando com ardor os exercicios de *sport* em que tão utilmente se compraz a mocidade ingleza. É, porém, quasi desde o principio da sua permanencia em Cambridge que DARWIN se relaciona com HENSLOW, o notavel professor de botanica. A dedicada amizade de HENSLOW exerceu uma benefica influencia na sua vida durante um largo periodo.

Uma circumstancia casual veio imprimir uma orientação definitiva á carreira de DARWIN. O capitão FITZ-ROY que ia partir em um navio do governo britannico, o *Beagle*, em viagem de circumnavegação, com o fim de estudar determinados assumptos maritimos, fez constar que offerecia uma installação a bordo a um naturalista que quizesse fazer a exploração scientifica das regiões que tencionavam visitar. Foi ainda HENSLOW quem mais concorreu para que DARWIN acceitasse a proposta. DARWIN realmente acceitou, como voluntario, sem indemnisação alguma, sómente com o direito de ficar senhor das collecções obtidas, collecções que elle depois cedeu, na sua maior parte, a diversos estabelecimentos scientificos.

A viagem a bordo do *Beagle* durou cinco annos (1831-1836). Principiou quando DARWIN contava apenas 21 annos e, facto notavel, logo desde o começo elle nos surprehende, revelan-

do-se o observador methodico, corajoso, infatigavel, e, conjuntamente, o investigador dotado de uma poderosa intuição da verdade. Segundo nos confessa DARWIN, a viagem do *Beagle* foi o acontecimento mais importante da sua existencia, porque o obrigou a «estudar, ao mesmo tempo, e com rigor, diversos ramos das scienciaes naturaes, o que lhe augmentou notavelmente as faculdades de observação».

Durante a viagem visitou o Archipelago de Cabo Verde, Fernando Noronha, o littoral do Brazil (desde Bahia), do Uruguay e da Republica Argentina, as ilhas Falkland, a Terra de Fogo até ao cabo Horn. Passou o Estreito de Magalhães, seguiu o littoral do Chile e do Peru até Callao. Em todos os pontos por onde passava, DARWIN fazia sempre as possiveis excursões para o interior. Percorreu as differentes ilhas do Archipelago de Galapagos. Visitou Taiti, a Nova Zelandia, Sydney na Australia, a Tasmania, as Ilhas madreporicas Keeling. Esteve ainda nas Ilhas Mauricia, Santa Helena e Ascensão.

Voltando a Inglaterra, ainda foi viver alguns mezes em Cambridge (1836). Em seguida mudou a sua habitação para Londres, onde se conservou até 1842. Em 1839 realisou o seu casamento com EMMA WEDGWOOD, filha de JOSIAH WEDGWOOD. É em 1842 que DARWIN muda para Down (Kent), fixando alli definitivamente a sua residencia

A vida de DARWIN, a partir da viagem do *Beagle*, é inteiramente absorvida pelas suas incessantes investigações scientificas.

Deixando de parte o extraordinario numero de memorias especiaes de que DARWIN foi auctor, limitar-nos-hemos sómente a recordar os seus trabalhos mais importantes.

1. O Jornal e investigações que fez durante a viagem do *Beagle* (*Journal and Researches*, 1839). A edição condensada d'essa narrativa foi publicada mais tarde (1860) sob o titulo — *A Naturalist's Voyage round the World*.

O estudo das collecções de zoologia (*Zoology of the Voyage of H. M. S. Beagle*) foi editado por DARWIN, e comprehende cinco volumes: *Mammiferos fosséis* pelo prof. RICHARD OWEN; *Mammiferos actuaes* por WATERHOUSE; *Aves* por GOULD; *Peixes* por JENYNS; e os *Reptis* por BELL.

2. A Geologia da viagem do *Beagle*. Parte 1.^a: *A estrutura e distribuição dos recifes de coral* (1842). Parte 2.^a: *Observações geologicas sobre as ilhas vulcanicas* (1844). Parte 3.^a: *Observações geologicas na America do Sul* (1846).

3. *O papel dos vermes na formação da terra vegetal* (1881).

O alto valor das investigações que DARWIN realisou em geologia foi devidamente estudado por ARCHIBALD GEIKIE na confe-

rencia cuja summula já expuzemos. Não temos pois de voltar a esse assumpto.

4. *Os estudos sobre os cirripides* (1851 e 1854). Foram o producto de oito annos de trabalho, e muito concorreram para que DARWIN ficasse possuindo inteiramente os methodos então empregados em zoologia anatomica e descriptiva.

5. *A Origem das Especies* (1859) e os trabalhos que se relacionam intimamente com a theoria da descendencia: *Variação dos animaes e das plantas no estado domestico* (1868); *Descendencia do homem* (1871); e ainda filiamos neste grupo *A expressão das emoções no homem e nos animaes* (1872).

Já indicámos os primeiros factos que levaram DARWIN ao conceito da evolução e da importancia da selecção natural, quando summariamente mencionámos as considerações que a esse respeito faz FRANCIS DARWIN na introdução ás *Foundations of the Origin*.

5. A longa serie de notaveis observações e experiencias ácerca de biologia vegetal.

A estes dois ultimos grupos de estudos referir-nos-hemos mais demoradamente nos paragraphos seguintes.

DARWIN falleceu em Down a 19 de abril de 1882. Foi sepultado (26 de abril) em Westminster, proximo ao tumulo de NEWTON. Perto está tambem a campa de HERSCHEL e ultimamente, a pouca distancia d'esses jazigos, foi inhumado KELVIN. Quasi lado a lado se encontram, no grande pantheon inglez, as inscripções commemorativas d'esses quatro homens que tão intensa luz projectaram nos mais transcendentos problemas da natureza.

Dominando a grandiosa quadra central do *Natural History Museum* (Londres) foi erigida a expensas de uma subscrição publica uma estatua de DARWIN executada por BOEHM. Na occasião da inauguração (9 de junho de 1885) «ao address do fallecido prof. HUXLEY, P. R. S., por parte do *Memorial Committee*, respondeu o actual rei de Inglaterra (então principe de Galles), em nome da corporação directora do Museu».

A estatua de DARWIN parece viver, tal é a expressão de profundo pensar com que o artista lhe soube animar a physionomia em que um dos traços mais característicos é a proeminente amplidão da fronte.

Em baixo, na ampla quadra, sobretudo na parte central, estão dispostas variadas colleccões do *Museum*, escolhidas por fórma a deixar em relevo a plasticidade dos organismos sob a acção dos factores biologicos que DARWIN estudou.

Tambem nas magnificas colleccões de anatomia comparada

do *College of Surgeons* de Londres encontrámos muitas disposições de exemplares, demonstrativas da acção da mesma ordem de factores.

V

A noção de que a historia natural dos seres vivos tem o character de um desenvolvimento evolutivo é hoje tão geralmente admittida, como sendo a unica hypothese, a tal respeito formulada, em perfeita harmonia com os factos, que difficilmente podemos avaliar a intensidade de esforço intellectual, e a tenacidade na sequencia de pacientes observações que deram á publicação de DARWIN sobre a *Origem das Espécies* os fóros de um dos acontecimentos mais notaveis na historia da sciencia.

Julgam muitos que as controversias que com tanta violencia se levantaram por occasião da publicação dos trabalhos de DARWIN sobre a theoria da descendencia provinham principalmente do campo da orthodoxia religiosa. É um engano ⁽¹⁾. Muitos dos homens que então atacavam o transformismo não o faziam pelo respeito aos dogmas tradicionaes. Basta dizer que alguns anthropologistas e alguns geologos dos mais notaveis da epocha foram durante longo tempo adversarios convictos da doutrina da evolução organica.

Aos mais injustos ataques, produzidos geralmente pela imperfeita comprehensão da doutrina, respondeu DARWIN, sempre com a maxima serenidade, analysando scientificamente os argumentos, resolvendo as duvidas pelo estudo aturado de novos factos, e nunca procurando a victoria sobre o adversario, mas

(1) «... Mais ce qui précède suffira, je pense, pour mettre hors de doute que le transformisme s'allie fort bien à toutes les opinions philosophiques et religieuses.

En fait, on peut être libre penseur comme AUGUSTE COMTE et CHARLES ROBIN et rejeter toutes les théories comprises sous cette dénomination commune.

En revanche on peut adopter celle de ses théories qui paraît préférable et rester — franchement déiste, comme LAMARCK; à demi déiste, à demi agnostique, comme DARWIN; religieux avec expansion, comme GEOFROY; catholique, tout en conservant une certaine indépendance scientifique, comme D'OMALIUS; enfin catholique, très certainement comme le R. P. BELLINCK.

Ainsi les doctrines transformistes n'ont en réalité rien à voir avec la philosophie ou le dogme. Elles sont essentiellement, uniquement du ressort de la science seule. Nous devons donc les discuter et les juger, sans jamais nous laisser entraîner sur le terrain des controverses». (A. DE QUATREFAGES, *Darwin et ses précurseurs français*, Préface, pag. 5).

o esclarecimento mais completo da verdade. Esta superioridade tão rara concorreu muito para que ainda em sua vida fossem bem comprehendidos os fundamentos essenciaes da doutrina que defendia.

Deu-se, porém, um facto que surprehenderia, se não se tivesse já semelhantemente repetido na historia da sciencia. A principio negava-se o transformismo e, muitas vezes mesmo, os seus mais audazes adversarios esqueciam que em discussões d'esta ordem se deviam conservar sempre em um campo exclusivamente scientifico. Depois, quando se reconheceu o valor da nova theoria, houve quem pensasse que os trabalhos de DARWIN sobre o transformismo não tinham o alto merito que geralmente lhes era attribuido porque, na affirmacão d'essa doutrina, tivera precursores notaveis.

Não podemos esquecer, é claro, o valor d'esses precursores. Reconhecemos a grandeza de LAMARCK ⁽¹⁾, a lucidez de SAINT HILAIRE, a intuição de KANT, de ERASMO DARWIN e de GOETHE. Todos sabem que na mesma sessão da Sociedade Linneana de Londres em que, pela primeira vez, DARWIN deu publico conhecimento dos seus estudos sobre a evolução, foi lida a celebre memoria de WALLACE sobre a selecção natural. Os trabalhos de DARWIN teem porém o character de uma tão larga generalização, parallelamente justificada pela perfeita methodização de um immenso material de factos demonstrativos, que não ha duvida em affirmar que a sua gloria não é um reflexo da dos seus notaveis precursores; mas que, pela investigação das bases scientificas do transformismo, elle nos deu um padrão seguro para aferir o valor das theorias existentes.

A propria doutrina evolucionista nos faz prever que as grandes descobertas não pertencem geralmente a um só homem. Algumas vezes porém uma alta individualidade dotada de poderosa intuição transforma as idéas mais ou menos vagamente esboçadas, em noções concretas, fazendo desde logo entrar no dominio util da sciencia conceitos que só muito mais tarde viriam a exercer a sua productiva influencia. DARWIN teve o papel de uma d'essas grandes individualidades caracterisadas essencialmente pela sua genial intuição.

(1) Quando, na viagem para Cambridge, passavamos em Paris, inaugurava-se alli, no Jardim das Plantas (*Museum de Histoire naturelle*), uma estatua a LAMARCK. A memoria d'este naturalista cujos merecimentos foram tão injustamente apreciados por muitos dos seus contemporaneos tem tido actualmente a sua legitima consagração.

Atacando de frente problemas que a muitos pareciam insolúveis, DARWIN mostrou sobretudo qual o methodo a seguir para os resolver. Póde dizer-se que é a partir de então que a biologia geral tem o seu principio, e que a historia natural deixou de ser uma simples collecção de factos pouco mais do que arithmeticamente agglomerados. A morphologia dos seres vivos é hoje considerada, não o resultado d'uma moldagem immutavel, mas sim o producto evolutivo da acção e reacção dos factores internos biochimicos e do complexo dos factores externos.

Convém recordar que na doutrina transformista se abrange o estudo de cinco pontos essenciaes:

1.^o O exame das variações que actualmente se possam observar em um numero maior ou menor dos individuos de cada especie.

2.^o A indagação das variações progressivas ou regressivas que successivamente se foram integrando, tendo como consequencia a transformação das especies na serie dos tempos geologicos.

Relativamente a estes dois pontos que importam a prova da admissibilidade da noção evolutiva, independentemente do conhecimento das causas de variação, os trabalhos scientificos recentes continuam confirmando as idéas affirmativas de DARWIN a tal respeito.

O valor de uma theoria scientifica deve avaliar-se pelo numero de factos conhecidos que relaciona e sobretudo pelo numero de novos factos que nos permite prever. Sob esse ponto de vista, principalmente no campo da paleontologia e da embryologia, ninguem póde negar o alto valor da theoria da descendencia.

3.^o A determinação das causas das variações individuaes.

4.^o A investigação das condições de transmissibilidade, por herança, dos caracteres innatos ou adquiridos observados nas variações.

O estudo d'estes dois pontos, circumstancias determinantes das variações e as condições precisas da hereditariedade de certos caracteres, não ficou completo no tempo de DARWIN. Esses problemas são dos mais complexos da biologia e estamos ainda muito longe de conhecer a sua solução. Comtudo ha a esse respeito estudos parciaes de grande valor que vem illucidar consideravelmente alguns factos particulares.

Os mais importantes grupos de phenomenos estudados depois da publicação da *Origem das Especies* são os que dizem respeito ás condições de transmissibilidade dos caracteres men-

deleanos, e as observações de HUGO DE VRIES ácerca do grande valor que na evolução podem ter as variações bruscas, por elle denominadas mutações. O exame d'esses assumptos pertence ao nosso subsequente artigo, vindo então a proposito a devida referencia aos trabalhos de W. BATESON, o notavel professor de biologia na Universidade de Cambridge.

5.º A investigação das causas que na serie dos tempos geologicos imprimiram ás variações esboçadas uma determinada orientação evolutiva no sentido d'uma progressiva adaptação.

DARWIN encontrou na selecção natural uma das principaes causas da accumulção progressiva de caracteres uteis. Vulgarmente, mesmo, entende-se por darwinismo a explicação da transformação das especies, considerando a selecção natural como principal causa efficiente de aproveitamento das variações vantajosas a cada organismo ou ao grupo a que pertence.

WALLACE e mais tarde WEISMANN, seguidos actualmente por uma numerosa escola de naturalistas, teem attribuido á selecção natural um papel de maior importancia do que DARWIN lhe attribuia. Parece-nos que se deve fugir ao exaggero d'essas opiniões.

Julgamos que a selecção basta realmente para explicar o aperfeiçoamento d'um grande numero de adaptações. O genio de DARWIN mostrou-se principalmente na illucidação de muitos d'esses casos. É porém o proprio DARWIN que não attribue á selecção uma importancia exclusiva.

Para se comprehenderem inteiramente as causas geraes da variação dos organismos seria necessario ter um conhecimento muito mais completo da constituição biochimica da substancia viva do que temos actualmente. Seria além d'isso necessario ainda que alguns capitulos da physica e da chimica estivessem mais perfeitos de que hoje se encontram. As causas da transformação dos seres vivos decerto nunca poderão ser abrangidas em uma formula simples.

Um ponto devemos deixar esclarecido. Alguns sociologistas mostram-se receosos de que a doutrina da selecção tenha consequencias educativas nefastas, porque parecendo que a conservação e aperfeiçoamento da raça pertencem mais especialmente aos vencedores no «*struggle for life*», a moral teria de assentar sobre novas bases. Em primeiro logar é preciso não esquecer que a selecção natural está muito longe de ser um factor exclusivo da evolução dos organismos, porque, sendo um factor externo, temos ainda a accrescentar-lhe, pelo menos, todas as causas de origem interna dependentes da constituição intima de cada ser. Além d'isso devemos notar tambem que na for-

mação das sociedades superiores a adaptação dá-se parallelamente á divisão de trabalho, e essa especialisação de actividades torna os individuos mutualistas, porque exercem respectivamente funcções diversas, mas que são uteis ou mesmo necessarias á vida da tribu. Nesse caso o corpo social tenderá instinctivamente a favorecer, em cada individuo, o desenvolvimento das qualidades mais vantajosas á collectividade.

O principio tão brilhantemente posto em evidencia, por EDMOND PERRIER, da associação das merides, com divisão de trabalho, para a formação dos organismos superiores, tem igualmente applicação á constituição dos agrupamentos sociaes d'esses organismos.

*

Convém lembrar que os principios da lei embryologica fundamental, mais tarde vulgarmente denominada lei de FRITZ MULLER, foram estudados por DARWIN que claramente os estabeleceu nas suas investigações sobre a descendencia das especies. A este assumpto se refere DARWIN ⁽¹⁾ na sua autobiographia.

Essa lei ontogenica, synthetizando as relações existentes entre o desenvolvimento de cada individuo e as phases morphologicas que successivamente foram attingidas pelos seus ancestraes, tem uma importancia fundamental na doutrina da evolução. Não queremos dizer que o complexo de factos a que se refere não possa ainda ser abrangido em uma formula mais perfeita. No emtanto a totalidade dos phenomenos já relacionados na formula actual constitue uma das principaes bases do transformismo.

Com effeito basta uma observação mesmo elementar dos fa-

(1) «Não houve ponto que me causasse tão viva satisfação quando eu trabalhava na *Origem das Especies* como a explicação da immensa differença que em muitas classes existe entre o embrião e o animal adulto e da extrema semelhança dos embriões na mesma classe. Não tenho a menor lembrança de que, nas primeiras criticas referentes á *Origem*, tivesse sido apresentada qualquer observação a tal respeito. Recordo-me que, por esse motivo, exprimi a minha surpresa, em uma carta, a ASA GRAY.

Durante estes ultimos annos, diversos criticos attribuiram toda a honra a FRITZ MULLER e a HAECKEL que, sem duvida alguma, estudaram a questão mais seriamente e, sob alguns pontos de vista, mais correctamente do que eu. Tinha materiaes sufficientes para elaborar um capitulo inteiro e eu deveria mesmo ter discutido o assumpto mais desenvolvidamente, porque é evidente que não conseguí impressionar os meus leitores e, segundo a minha opinião, merece toda a honra quem isso consegue.» (CARLOS DARWIN, *Autobiographia*, na *Vida e correspondencia* cit., tr. fr., pag. 91).

ctos mais correntes da embryologia para se obterem indicações valiosas acerca do mais provavel desenvolvimento phylogénico de cada especie. Recordaremos a esse respeito: a existencia actual da geração sexuada prothallica das cryptogamicas vasculares, mostrando-nos verosimilmente que estas plantas devem ter passado, nas suas phases ancestraes, por um estadio algiforme, sómente então adaptado a meios aquaticos ou extremamente humidos; a passagem, ainda nessas cryptogamicas, dos typos isosporeos para os heterosporeos; a tendencia, nos typos heterosporeos, para a successiva redução dos prothallus, tornando-se primeiramente sub-inclusos, depois inclusos, e por fim atrophando-se; a existencia da cellula prothallica esteril no grão de pollen, e a dos corpusculos archegonicos do sacco embryonario das gymnospermicas. Por outro lado, não é menos eloquente, sob este ponto de vista, o estudo da embryologia animal, principalmente a dos vertebrados. Limitar-nos-hemos a lembrar, como prova sufficiente do que dizemos: a evolução embryogenica dos órgãos nephridianos dos vertebrados e a sua progressiva adaptação á funcção de vectores dos gametas; a persistencia do canal neurenterico nas fórmas embryonarias dos vertebrados; o desenvolvimento da circulação dos amniotas, passando por phases ontogenicas intimamente relacionadas com a existencia de fendas branchiaes; o desenvolvimento anatomico e histologico do encephalo dos mammiferos, passando por estados transitorios em que se vê com clareza o parallelismo homologico com os ichthyopsideos e sauropsideos; a embryogenia do hyoide, da apophyse estyloidea do temporal e da cadeia dos pequenos ossos da caixa do tympano que se dá homologamente ao processo de formação dos órgãos do esqueleto branchial dos ichthyopsideos; a genese da cavidade posterior dos epiploons, pela rotação de uma lamina peritoneal, a principio existente em um plano de symetria antero-posterior; etc.

VI

Finalmente, ha ainda a referir os trabalhos de DARWIN mais especialmente concernentes á biologia vegetal.

Em 1862 publica DARWIN o seu livro *A fecundação das orchideas pelos insectos*, e em 1865 é communicada á Sociedade Linneana a sua memoria *Movimentos e habitos das plantas trepadoras*. É porém a partir de 1875 que a actividade de DARWIN é em grande parte absorvida pelos estudos de biologia das plantas. É então que successivamente vão sendo publicados esses livros

que tão vivo interesse despertaram: *Plantas insectívoras* (1875)⁽¹⁾; *Movimentos e hábitos das plantas trepadoras* (1875); *Os efeitos da fecundação cruzada e directa, no reino vegetal* (1876); *As diferentes fôrmas de flores nas plantas da mesma especie* (1877); e *A faculdade motriz nas plantas* (1880). Este ultimo estudo foi realizado com a collaboração de FRANCIS DARWIN.

São bem conhecidos estes livros por todos os que se dedicam a sciencias naturaes. «Tive sempre prazer em levantar as plantas na escala dos seres organisados» escreve DARWIN referindo-se ás suas observações sobre os movimentos encontrados no reino vegetal.

Nos trabalhos de DARWIN sobre a physiologia das plantas

(1) Ácerca dos primeiros exemplares vivos que obtive da planta insectívora o *Drosophyllum lusitanicum* escreve DARWIN: «Esta planta rara encontra-se sómente em Portugal, segundo o dr. HOOKER existe igualmente em Marrocos. Pude obter plantas vivas d'esta especie, graças ao favor do sr. W. C. TAIT, e, mais tarde, do sr. G. MAW e do dr. MOORE. O sr. TAIT informou-me de que esta planta cresce, em grande abundancia, nas encostas d'algumas collinas das cercanias do Porto...» (DARWIN, *Plantas insectívoras*, tr. fr., pag. 387). Agradecendo, escreveu DARWIN uma carta a WILLIAM TAIT, da qual extrahimos os seguintes interessantes periodos: «I have received your two letters of March 2nd and 5th (1869), and I really do not know how to thank you enough for your extraordinary kindness and energy. I am glad to hear that the inhabitants notice the power of the *Drosophyllum* to catch flies, for this is the subject of my studies, I have observed during several years the manner in which this is effected, and the results produced in several species of *Drosera*, and in the wonderful American *Dionoea*, the leaves of which catch insects just like a steel rat-trap. Hence I was most anxious to learn how the *Drosophyllum* would act, so that the Director of the Royal Gardens at Kew wrote some years ago to Portugal to obtain specimens for me, but quite failed. So you see what a favour you have conferred on me. With *Drosera* it is nothing less than marvellous how minute a fraction of a grain of any nitrogenised matter the plant can detect; and how differently it behaves when matter, not containing nitrogen, of the same consistence wheter fluid or solid, is applied to the glands. It is also exquisitely sensitive to a weight of even the $\frac{1}{70000}$ of a grain..... My M. S. on this subject has been nearly ready for publication during some years, but when I shall have strength and time to publish I know not». (*More Letters of Charles Darwin*, vol. 2.º, pag. 381).

O *Drosophyllum lusitanicum* encontra-se tambem no sul da Hespanha.

Os exemplares do *Drosophyllum* enviados a DARWIN pelo sr. WILLIAM TAIT foram collhidos perto de S. Pedro da Cova que é a região mais septentrional em que esta planta tem sido encontrada, no nosso paiz.

O sr. WILLIAM C. TAIT é bem conhecido entre nós pelos seus estudos sobre a ornithologia portugueza, sendo para notar, com especialidade, as suas observações ácerca das aves dos arredores do Porto.

chamam mais particularmente a attenção os seguintes assumptos: determinação rigorosa das circumstancias de extrema sensibilidade de reacção motriz que se notam em um grande numero de vegetaes, especialmente em certos orgãos, p. ex., nos tentaculos d'algumas plantas carnivoras, nos braços das gavinhas, nos topos vegetativos radicales e caulinares, etc.; o estudo desenvolvido dos movimentos de circumnutação (aos quaes DARWIN attribue mesmo uma importancia excessiva); a analyse das fórmãs de adaptação das flores á visita frequente e util dos insectos que em bastantes circumstancias são os principaes agentes de transporte do pollen, como acontece, por exemplo, em grande numero de orchideas, e em plantas de flores dimorphas ou trimorphas, com fórmãs heterostyleas; as numerosas observações demonstrativas de que, na maioria das phanerogamicas que sob esse ponto de vista foram examinadas, a fecundação cruzada entre individuos da mesma especie originava productos mais variados e com mais vigor do que a autofecundação, principalmente quando os dois individuos geradores tinham vivido durante um tempo mais ou menos longo em circumstancias diversas; a demonstração de que, ainda em certos casos em que a autofecundação se dá consecutiva e normalmente, é vantajosa e por vezes necessaria, de quando em quando, a fecundação cruzada; a investigação do papel que desempenham as flores cleistogamicas, etc.

Dos estudos de DARWIN se depreheende que para a fixação dos caracteres de uma determinada variedade é util em certos casos a autofecundação, mas que sob um ponto de vista geral a fecundação cruzada representa um papel de alta importancia no reino vegetal. Vê-se pois que a differença entre a constituição biochimica dos dois gametas que se reúnem para produzir um novo organismo deve ser sufficientemente grande, dentro de certos limites, além dos quaes insensivelmente se passaria para os phenomenos da hybridação (1).

(1) Devemos recordar a parte que teve DARWIN na iniciativa da publicação do Indicador de Kew (*Nomenclator Botanicus Darwinianus*). A esse respeito escreve FRANCIS DARWIN:

«Uma noticia das relações de meu pae com o *Index* dos nomes das plantas actualmente (1887) em curso de publicação em Kew, encontra-se no trabalho de B. DAYDON JACKSON, no *Journal of Botany* de 1887, pag. 131. JACKSON dá-nos a seguinte narração de J. D. HOOKER: Pouco tempo antes de fallecer, CARLOS DARWIN informou sir JOSEPH HOOKER de que tinha tenção de consagrar annualmente uma somma consideravel para auxiliar ou fazer progredir qualquer obra ou diversas obras, podendo ser de utilidade pra-

*

Não é pois sómente pelos seus estudos sobre a evolução dos seres vivos que pertence a DARWIN um lugar excepcional na historia da sciencia. Em todo o amplissimo campo das sciencias naturaes, na geologia e paleontologia e na biologia botanica e zoologica, realisou investigações que maravilharam os seus contemporaneos e ainda orientam nos seus estudos muitos dos grandes trabalhadores da geração actual. Quando elle aos 27 annos entrou para a Sociedade de Geologia, já, a seu respeito, em uma carta a SEDWIG, LYELL escrevia: «DARWIN é um glorioso elemento para a nossa Associação» (*is a glorious addition to my society of geologists*). HOOKER, abrindo a 38.^a sessão da Associação Britannica affirmava que os trabalhos de DARWIN sobre a faculdade motriz das plantas e sobre a biologia floral continham

tica á sciencia biologica, e de fazer, no seu testamento, as reservas necessarias para o caso em que não pudesse realizar as referidas intenções durante a sua vida... «CARLOS DARWIN communicou semelhantemente as suas intenções ao prof. JUDD e ao prof. HUXLEY, com respeito a geologia e a zoologia, cujo avanço elle tinha o vivo desejo de favorecer, consultando-os sob a fôrma mais util de conseguir esse fim».

«Meu pae, continúa FRANCIS DARWIN, pediu a sir JOSEPH HOOKER que tomasse em consideração, com o auxilio do seu estado maior botanico de Kew, e com o fallecido BENTHAM, a extensão e o plano geral do trabalho proposto, e suggerisse os melhores meios de execução». Seguindo essa idéa, sir JOSEPH teve, além d'isso, a vantagem de aproveitar os conhecimentos e a experiencia do prof. ASA GRAY, de Cambridge (Estados Unidos da America), e de JOHN BALL, membro da Sociedade Real.

«O plano da obra projectada foi discutido com cuidado e HOOKER enviou a elaboração circumstanciada a B. DAYDON JACKSON, secretario da *Linnean Society*, cujo saber extenso no que interessa a litteratura botanica o indicava para aquelle fim. A primeira idéa de meu pae de fazer uma edição moderna do *Nomenclator* de STEUDEL foi abandonada na pratica, e a idéa que actualmente se tem em vista é antes a de confeccionar uma lista de generos e de especies (com referencias), fundado sobre o *Genera Plantarum* de BENTHAM e de HOOKER. A natureza collossal do trabalho que se prosegue em Kew pôde ser avaliada pelo facto da enorme extensão (1887) do manuscrito do *Index*. O trabalho é proseguído com constancia, sob a direcção de JOSEPH HOOKER, executado com um zelo admiravel por D. JACKSON que se consagra, sem poupar os sacrificios proprios, a esta empreza, para a qual elle utiliza tambem o interesse do prof. OLIVER e de THILSETON DYER.

«O *Index* de Kew que, segundo todas as probabilidades, poderá estar impresso dentro de quatro ou cinco annos, será um memorial digno de meu pae...» (*Vida e correspondencia de Carlos Darwin*, tr. fr., 1888, vol. 2.º, pag. 736).

algumas das mais importantes descobertas da botânica. Acerca dos seus estudos sobre as flores, diz KARL GOEBEL: muitos phenomenos poderão eventualmente ser considerados sob um diverso aspecto; no entanto as investigações de DARWIN hão de formar sempre a base da biologia floral (*will always form the foundation of Floral Biology*), sobre a qual o futuro poderá continuar a edificar. Relativamente á monographia de DARWIN sobre os cirripedes escreveu HUXLEY: é um trabalho admiravel e constitue uma grande addição aos conhecimentos positivos (*is a very admirable piece of work and constituted a great addition to positive knowledge*). Já em 1864 quando ainda não eram bem recebidas as idéas transformistas, a Sociedade Real de Londres concedia a DARWIN a *Copley Medal* que é a mais elevada honra que essa alta corporação confere. O Jornal de investigações realizadas durante a viagem de circumnavegação que fez a bordo do *Beagle* dá-nos a medida das suas faculdades de profunda observação e da inexgotavel fecundidade do seu talento, mostrando-nos ao mesmo tempo o escriptor que sob uma fórma natural e simples sabe dar todo o realce aos grandiosos quadros da natureza que nos descreve. Mesmo nos seus livros sobre a evolução ha uma tal quantidade de novos factos perfeitamente seriados, e entre si ligados intimamente, que o seu conhecimento é essencial a todos os que cultivam as sciencias naturaes, independentemente das deducções que logicamente se possam inferir com respeito á doutrina fundamental.

Era pois de esperar que na Commemoração que se ia realizar em Cambridge se encontrassem os investigadores que dedicam a attenção ao estudo geral da biologia e, além d'esses, os cultores especiaes de cada um dos grandes ramos das sciencias da natureza. Assim aconteceu. A Commemoração cambridgeana teve o caracter de um congresso de sciencias naturaes e ainda das sciencias que mais ou menos directamente podem aproveitar com a resolução dos problemas fundamentaes da biologia geral. Não é sómente a Universidade de Cambridge, não é sómente a Inglaterra que se orgulham do nome de DARWIN. A sua tradição é igualmente respeitada em todo o mundo scientifico actual.

Terminamos, recordando as palavras de HUXLEY (1885), cuja citação fechava o programma da Celebração darwineana de Cambridge e que, segundo nos parece, traduzem com toda a precisão, o pensamento que animava todos os que puderam concorrer áquella grandiosa homenagem: «Seja qual for o ul-

timo veredictum da posteridade sobre esta ou aquella opinião que DARWIN tenha proposto; sejam quaes forem os esboços ou previsões das suas doutrinas que se encontrem nos trabalhos dos predecessores; um facto de largo alcance subsiste e é que, depois da publicação da *Origem das Espécies*, e por motivo do seu apparecimento, os conceitos fundamentaes e a orientação dos que estudam a Natureza viva mudaram inteiramente».

PLANTAS NOVAS PARA A FLORA PORTUGUEZA

POR

GONÇALO SAMPAIO

As diversas herborisações a que, em missão de estudo do Gabinete de Botanica da Academia Polytechnica do Porto, tenho procedido em todo o paiz, durante os ultimos annos, não só permittiram a aquisição de numerosos exemplares de especies criticas e raras para o herbario d'este instituto scientifico, mas determinaram, tambem, a descoberta de muitas plantas cuja existencia na flora portugueza por inteiro se desconhecia. D'estas, entre as quaes se encontram algumas especies e variedades novas, tenho successivamente dado noticia em differentes publicações scientificas; resta-me, porém, a citação das encontradas pelas explorações de 1908 e 1909, assim como a de algumas determinadas recentemente pela revisão do herbario da Academia. São as seguintes:

1. ***Alopecurus fulvus***, Sm. — Miranda do Douro: na ribeira, junto da ponte.
Encontrei-a a 28 de julho de 1909, colhendo numerosos exemplares.
2. ***Trisetum scabriusculum***, Coss. — Barca d'Alva: no cimo de uma collina, junto da povoação. Era planta considerada privativa da Espanha. Descobri-a em junho de 1903, colhendo o exemplar que se encontra depositado no herbario da Academia Polytechnica.

3. **Bromus erectus**, Huds. — Gerez: nas Caldas.
Foi encontrada por mim nesta localidade, no dia 16 de maio de 1909, tendo verificado a sua abundancia junto da estação das matas, onde colhi bons exemplares em floração.
4. **Arundo Pliniana**, Turr. — Buarcos.
Pertencem a esta especie os exemplares colhidos em Buarcos, pelo sr. A. Goltz de Carvalho, em outubro de 1884, e distribuidos pela Sociedade Broteriana com o n.º 604, sob a etiqueta do *Arundo Donax*, Lin. Com esta mesma designação encontra-se no herbario da Academia Polytechnica um outro exemplar da planta, colhido egualmente em Buarcos em outubro de 1868 pelo fallecido engenheiro Eugenio Schmitz.
5. **Agropyrum littorale**, Dum. — Matosinhos :
margens do rio Leça, perto das marinhas.
É planta não rara na localidade indicada, onde a colhi pela primeira vez em 1898.
6. **Asparagus tenuifolius**, Lamk. — Odemira :
nas margens do rio Mira, perto do Moinho d'Alem e nas margens da ribeira do Torgal.
Descobri esta especie em 1905, colhendo exemplares nos logares indicados, exemplares que no Boletim da Sociedade Broteriana, vol. xxiv, pag. 109, referi ao *A. officinalis*, Lin. que não existe na região.
7. **Plantago Loefflingii**, Lin. — Trancoso: na povoação, junto da Escola primaria official.
Esta interessantissima planta foi descoberta por mim na estação referida, a 12 de julho de 1908. Não era abundante na região.
8. **Blitum virgatum**, Lin. — Miranda do Douro :
em Duas Igrejas e em Caçarelhos, pelas calçadas e bordas dos caminhos.
É o unico representante do genero Blitum no nosso paiz. Encontrei-o pela primeira vez nas Duas Igrejas, a 27 de julho de 1909, verificando alguns dias depois a sua abundancia em Caçarelhos, pelos caminhos da povoação.

9. **Rumex arifolius**, All. — Minho, Douro littoral, etc. nos lugares frescos.
Abunda nas regiões citadas, onde se não encontra o *R. acetosa*, Lin. que é planta diversa, das Beiras, Alto Alentejo, etc.

10. **Saxifraga Hervieri**, Deb. et Raverch. — Bragança: em Valle de Chorido, Cabeço de S. Bartholomeu e bordas da estrada de França.
Descobri esta curiosa especie no Cabeço de S. Bartholomeu, onde é rara, a 6 de abril de 1909, encontrando no dia seguinte numerosos exemplares nas outras duas localidades. A planta fôra descoberta anteriormente pelo sr. Raverchon na serra do Griego, provincia de Taruel, na Espanha, e descripta pouco depois como especie nova para a sciencia. Bragança é, pois, a segunda localidade conhecida, até hoje, da interessante Saxifraga.

11. **Schleranthus collinus**, Horng. — Bragança: perto do Sabor e na base da Serra de Rebordãos, perto da povoação.
É planta abundante nas localidades indicadas, onde a colhi a 5 e 7 de abril de 1909.

12. **Spergula vernalis**, Willd. raç. **celtiberica** (Asch.) — Serra da Estrella, perto do Observatorio.
O exemplar que se encontra no herbario da Academia Polytechnica foi colhido por mim no logar citado, a 18 de julho de 1908.

13. **Rubus echinatus**, Lindl. — Serra de Montemuro: Gralheira.
Deve-se ao meu amigo dr. Manuel Pinto, illustre chefe do Laboratorio «Nobre» da Escola Medica do Porto, a descoberta d'esta especie em Portugal. Os exemplares existentes no herbario da Academia foram colhidos pelo dr. Manuel Pinto no logar mencionado, em agosto de 1908, e differem apenas da fôrma typica pelas flores um tanto menores.

14. **Malva fastigiata**, Cav. — De Traz dos Montes á Beira Baixa.
Pertencem a esta fôrma todos os exemplares portuguezes

atribuídos á *M. moschata* e á *M. Tournefortiana* pelos srs. C. Machado e P. Coutinho.

Devo accrescentar que em Traz dos Montes a *M. fastigiata* apresenta fórmas de transição para a *M. italica*, Poll. que, como ella, não passa de uma raça da *M. alcea*, Lin.

15. **Alyssum psilocarpum**, Bois. — Brangança : Rebordãos, junto do apeadeiro da via ferrea; Senhor dos Perdidos.

Encontrei pela primeira vez esta curiosa especie, que era considerada privativa do centro e do sul da Espanha, a 5 de abril de 1909, perto do apeadeiro de Rebordãos, onde vive em mistura com o *A. hispidum*, Losc. abundante em toda a região.

Convem esclarecer que Willkomm, no «Prod. Fl. Hisp.» III, 834, inclue erroneamente esta planta na secção Pilonema, da qual se affasta, evidentemente, pelos filetes alado-denticulados. Do *A. hispidum*, com que vive ás vezes em sociedade, aparta-se nitidamente por ser um pouco mais precoce na floração e na fructificação, pelas petalas mais palidas, pelos estames alado-dentados, pelas capsulas glabras, mais tumidas, etc.

NOTA A PROPOSITO

DOS

QUERCUS LUSITANICA, LAMK., Q. HUMILIS, LAMK. E Q. FAGINEA, LAMK.

POR

GONÇALO SAMPAIO

No seu RARIORUM PLANTARUM HISTORIA enumera e figura Clusius tres carvalhos anãos de Portugal, sob as etiquetas de Robur III, a pag. 18, e Robur V e Robur VII, a pag. 19, dando o nome de *Quercus pumila* ao ultimo.

O Robur VII está figurado em exemplar completo e fructificado; quanto aos outros dois apenas o estão em ramos sem landras, mas providos de galhas, tendo o Robur III as do *Cynips toxae* (bugalho) e o Robur V as do *Cynips Kollari* (bugalhinha).

Representarão estes tres desenhos especies autonomas entre si? No estado relativamente adiantado em que se encontra hoje o conhecimento das fórmas do genero *Quercus* no nosso paiz é absolutamente impossivel não admittir que esses tres exemplares pertencem, pelo contrario, a uma só unidade especifica.

Em primeiro logar, deve-se notar que Clusius ligava um particular valor á presença, fórma e côr das galhas, e que é baseado nestes caracteres que faz principalmente consistir as differenças entre essas tres plantas. As outras dessimilhanças apontadas por elle são positivamente minimas e só para justificação de pequenas variedades teriam valor — desde que se provasse, claro está, a sua transmissão hereditaria. De resto, basta lançar os olhos ás tres gravuras referidas para se reconhecer que as plantas que representam teem todas exactamente o mesmo facias, os mesmos caracteres figurados, com a mesma fórma typica de folhas pequenas, serreado-mucronadas e de peciolos extrema-

mente curtos. A não ser, num, a falta de cecidias com presença de fructos, e a diversidade das cecidias nos outros, tudo o mais fere identicamente a vista do botânico, não se podendo deixar de reconhecer que os tres desenhos se referem a uma unica planta.

Sabe-se, com certeza, que os eminentes tratadistas contemporaneos Clusius, Lobel e Dodoens não só mantinham entre si as mais estreitas relações de amizade, mas até se auxiliavam mutuamente nos seus trabalhos scientificos, por tal modo que nas obras de cada um d'elles apparecem as gravuras das obras dos outros, a ponto de ser hoje impossivel averiguar a propriedade original de algumas. Por esta fórma, tambem os desenhos do Robur III, Robur V e Robur VII se encontram nos in-folio de Lobel, assim como, parcialmente, nos de Dodoens, embora reconhecidos como originaes de Clusius, que foi o unico dos tres que viajou em Portugal.

Ora é de notar que Dodoens, na sua notabilissima e principal obra, em que refundiu todas as anteriores, STIRPIUM HISTORIAE PEMPTADES SEX, de que tenho presente a edição original de 1583, faz o seguinte uso das mencionadas gravuras clusianas: a do Robur VII estampa-a a pag. 811 como indicativa de uma especie de *Quercus* que denomina com a designação binaria de *Quercus humilis*, mais tarde adoptada por Lamarek, em 1783, na ENCYCLOPEDIA METHODICA, vol. 1, pag. 719, ao passo que não utiliza a do Robur III e só emprega a do Robur V não para representar uma especie particular de carvalho anão mas, simplesmente, num capitulo áparte sobre galhas, para mostrar o que elle chama «galla minor». Não se ha de esquecer, pois, que Dodoens, amigo intimo de Clusius, provavelmente conhecedor das ideias d'este e, talvez, dos seus exemplares de herbario, se porventura existiam, dos tres Robur referidos apenas um mencionou como especie de *Quercus*, não utilizando a gravura do Robur III, por preferir como estampa da «galla maior» a do Robur III, e empregando a do Robur V só para exemplo da sua «galla minor». Em summa: Dodoens nos tres mencionados clichés apenas viu uma unica especie botanica, o *Quercus humilis*, considerando só nos dois restantes a diversidade de formas cecidicas.

Lamarek, porém, adoptando dois seculos depois o binome creado por Dodoens para o Robur VII de Clusius, elevou tambem à cathegoria de especie, sob a designação de *Quercus lusitanica*, o conjuncto dos Robur III e Robur V, que para Dodoens apenas significavam portadores de galhas differentes e que para Brotero, mais tarde, não deveriam corresponder a nenhuma

fôrma especial conhecida de *Quercus* do nosso paiz, entre as quaes reconhecia perfeitamente o *Q. humilis*, cujo nome mudou em *Q. fruticosa*, e mencionava o seu *Q. hybrida*, que outra coisa não era mais, provavelmente, do que uma fôrma do *Q. faginea*, Lamk.

Esta impossibilidade que Brotero sentiu em accomodar o *Q. lusitanica* a qualquer carvalho especial portuguez foi que o levou, realmente, a collocar-o entre os *Quercus* sempreverdes, com a hypothese falsa de que poderia bem ser uma simples forma do *Q. ilex*, Lin.. Resultou uma tal confusão, sem duvida, do conceito erroneo de Lamarek.

Todavia, em 1838, publicando o seu *ITER HISPANIENSE*, Webb é que não esteve com hesitações de qualquer natureza e, sem estudar devidamente o assumpto nas respectivas nascentes, reuniu sob a rubrica de *Q. lusitanica*, Lamk. muitas fôrmas descriptas anteriormente, entre as quaes se encontravam o *Q. faginea*, Lamk. e o *Q. hybrida*, Brot.

E fez carreira, infelizmente, a obra realisada por Webb, sendo em 1864 acceite e validada por Alph. De Candolle no *PRODROMUS SYSTEMATIS REGNI VEGETABILIS*, vol. xvi, pag. 17, e encontrando-se adoptada actualmnte em todos os tractados que se occupam dos *Quercus* da peninsula hispanica, nos quaes se mantém a autonomia especifica do *Q. humilis* e do *Q. lusitanica*, como foi admittido por Webb. Não obstante, constitue ella um erro manifesto, que de modo algum se deve manter.

É incontestavel que o carvalho extremamente polymorpho que Webb denominou *Q. lusitanica* foi, numa das suas fôrmas médias, descripto por Lamarek sob a etiqueta de *Q. faginea*, no vol. 1, pag. 725 da *ENCL. METH.* Este carvalho liga-se por fôrmas anãs ao *Q. humilis*, e os botanicos que admittem a independencia especifica dos dois terão de adoptar hoje o criterio de separação do sr. Pereira Coutinho — que é o mais consistente de todos — englobando no grupo especifico a que pertence o *Q. faginea* todas as fôrmas caracterisadas por peciolo mais ou menos alongados e reunindo ao *Q. humilis* todas as fôrmas de peciolo extremamente curtos ou quasi nulos.

Mas desde que se faz isto, desde que se conglobam no *Q. humilis* os exemplares de peciolo muito curtos, é totalmente impossivel deixar de incluir nelle o Robur III e o Robur V de Clusius, isto é, o verdadeiro *Q. lusitanica* de Lamarek — que foi constituido, expressamente, á custa d'estas duas fôrmas clusianas. As gravuras inequivocas do *RARIORUM PLANTARUM HISTORIA* não deixam a este respeito a menor sombra de duvida, visto que dão, precisamente, as folhas das fôrmas mais caracteris-

ticas do *Q. humilis*, pequenas, serreado-mucronadas e com peciolo muitissimo reduzido.

Em resumo: 1.^o o facto de serem as gravuras do Robur III, Robur V e Robur VII de Clusius absolutamente semelhantes entre si, pelo aspecto e pelos caracteres botanicos, e o facto d'este auctor só a descrever ás respectivas plantas caracteres differenciaes minimos, levam a admittir que *as tres gravuras referem-se a formas vegetaes não especificamente distinctas*; 2.^o para esta mesma conclusão nos leva o facto de Dodoens só indicar uma d'ellas como representativa de especie propria, sendo de presumir que o illustre tratadista deveria ter razões que o levassem a proceder assim; 3.^o que á mesma conclusão dá força a impossibilidade que Brotero sentiu de ajustar o *Quercus lusitanica*, Lamk. a qualquer *Quercus* especial de folha caduca diverso dos que enumerou; 4.^o que ainda á mesma conclusão tem de chegar os proprios botanicos que juntam num mesmo grupo especifico todas as fórmãs que, sendo affins do *Q. faginea*, são caracterisadas particularmente pelos seus peciolos muito curtos, visto que as tres gravuras clusianas indicam todas os peciolos quasi nulos, isto é, plantas d'esse mesmo grupo: o *Q. humilis*, Lamk.

Torna-se evidente, portanto: 1.^o que o *Q. lusitanica* de Lamarck não é o *Q. lusitanica* de Webb e dos auctores modernos, os quaes só podem apartar este do *Q. humilis* pelos peciolos mais ou menos alongados, 2.^o que se deve considerar incluído neste ultimo, como conjuncto de fórmãs sem valor taxonomico, banindo-se o emprego do respectivo binome, por ser a designação *Q. humilis* estabelecida sobre um exemplar fructificado e por ser mais antiga, como fundada já por Dodoens numa obra scientifica de valor; 3.^o que o grupo de fórmãs designadas actualmente *Q. lusitanica* terá de mudar de etiqueta, segundo as regras da nomenclatura botanica, devendo tomar o nome de *Q. faginea*, Lamk. nome que foi creado para uma das suas fórmãs medias e que é o mais antigo dos que se applicaram a qualquer d'ellas. Far-se-ha, pois, recta nomenclatura da seguinte maneira:

1. **Quercus faginea**, Lamk. Encl. meth. I, pag. 725;
Q. hybrida, Brot. Fl. lusit. II, pag. 31; *Q. lusitanica*,
Webb, A. DC. et all. sed non Lamk.

var. *baetica* (Webb): *Q. lusitanica* var. *baetica* Webb.
It. Hisp.

var. *Salzmänniana* (Webb): *Q. lusitanica* var. *Salzmänniana* Webb, loc. cit.

2. **Quercus humilis** (Dod.) Lamk. Encl. meth. 1, pag. 719 + *Q. lusitanica*, Lamk. Encl. met. 1, pag. 719; *Q. fruticosa* Brot. Fl. lusit. II, pag. 34.
var. *prasina* (Bosc.): *Q. prasina* Bosc.

Resta uma outra questão. É saber se ao *Q. faginea*, Lamk. se deve juntar ou não, numa só especie, o *Q. humilis*, Lamk. Sobre este ponto, porém, já em 1906, nas NOTAS CRITICAS SOBRE A FLORA PORTUGUEZA, expuz os motivos que me levam a admittir uma tal junção; todavia lembrarei aqui, resumidamente, que foi sobre observações demoradas e muito seguras, feitas ha alguns annos no sul do paiz, que verifiquei a ligação gradual das fórmas de um e outro grupo, de modo a não encontrar separação nitida entre ellas por um caracter preciso e constante.

Porto, fevereiro de 1910.

ÉSSAI D'UNE THÉORIE ANALYTIQUE DES LIGNES NON-EUCLIDIENNES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

à Rome

(Suite)

§ 49

Coordonnées (Σ, ω) , (Σ, R) . — L'aire Σ comprise entre un arc quelconque d'une ligne L (inconnue) et les rayons vecteurs extrêmes, soit liée à l'angle polaire ω et au rayon vecteur R par les relations finies

$$(42) \quad \Sigma = f(\omega)$$

$$(43) \quad \Sigma = \varphi(R).$$

On obtient d'ici par différentiation

$$d\Sigma = f'(\omega) d\omega = \varphi'(R) \cdot dR,$$

et comme d'ailleurs (§ 29)

$$d\Sigma = 2 \sin^2 \left(\frac{R}{2} \right) \cdot d\omega,$$

on a par comparaison

$$f'(\omega) \cdot d\omega = \varphi'(R) dR = 2 \sin^2 \left(\frac{R}{2} \right) d\omega.$$

On voit d'ici que dans le premier cas la ligne cherchée L est définie par l'équation polaire

$$(44) \quad 2 \sin^2 \left(\frac{R}{2} \right) = f(\omega).$$

Dans le deuxième cas on a

$$\frac{\varphi'(R)}{2 \sin^2 \left(\frac{R}{2} \right)} dR = d\omega,$$

d'où il suit par intégration

$$(45) \quad \frac{1}{2} \int \frac{\varphi'(R)}{\sin^2 \left(\frac{R}{2} \right)} \cdot dR = \omega + \omega_0,$$

ω_0 étant une constante arbitraire.

Telle est l'équation polaire de la ligne cherchée.

Résultats analogues dans le plan lobatschewskien.

Le procédé que l'on vient de développer démontre qu'une ligne non-euclidienne est déterminée, aussitôt que l'on connaît une relation finie entre l'aire Σ et l'angle polaire, ou le rayon vecteur.

§ 50

Applications. — 1.^o Si l'on suppose successivement

$$f(\omega) = a^2 \omega^3, \quad f(\omega) = -\frac{a^2}{\omega},$$

a étant une constante, on trouve à l'aide des formules du § 49

$$\sin \left(\frac{R}{2} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\omega, \quad \sin \left(\frac{R}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\omega}.$$

Ces équations en coordonnées polaires définissent respectivement les lignes planes où l'aire à secteurs Σ est proportionnelle au cube de l'angle polaire⁽¹⁾, ou inversement proportionnelle à l'angle polaire.

(1) Dans le plan ordinaire la ligne jouissant de cette propriété est la spirale d'ARCHIMÈDE.

2.^o L'aire à secteurs Σ soit liée au rayon vecteur par une des relations

$$\Sigma = a \cdot \sin^3\left(\frac{R}{2}\right), \quad \Sigma = a \cdot \sin\left(\frac{R}{2}\right),$$

a étant une constante.

Si l'on remplace la fonction générique $\varphi(R)$ paraissant dans l'équation (45), successivement par les deuxièmes membres des relations ci-dessus, on obtient respectivement

$$\sin\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\omega}{a}, \quad \sin\left(\frac{R}{2}\right) = -\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

On tombe ainsi sur les courbes que l'on vient de trouver dans l'exemple 1.^o

§ 51

Coordonnées (R, ρ) . — Le rayon de courbure ρ d'une ligne plane (inconnue) soit lié au rayon vecteur R par une des relations

$$(46) \quad \operatorname{tg} \rho = f(R)$$

$$(46') \quad \operatorname{th} \rho = f(R)$$

suivant la nature du plan.

Comme l'élimination de ρ entre ces équations et les équations (31), (31') du § 32, donne respectivement

$$d \sin p = \frac{\sin R \cdot dR}{f(R)}, \quad d \operatorname{sh} p = \frac{\operatorname{sh} R \cdot dR}{f(R)},$$

on obtient par intégration

$$(47) \quad \sin p = c + \int \frac{\sin R}{f(R)} \cdot dR$$

$$(47') \quad \operatorname{sh} p = c + \int \frac{\operatorname{sh} R}{f(R)} \cdot dR,$$

c étant une constante arbitraire.

En ayant alors recours à l'équation (35) et à son analogue

du plan lobatschewskien, on trouve les relations

$$(48) \quad \int \frac{\sin R \cdot dR}{\sqrt{\sin^2 R - \left[c + \int \frac{\sin R}{f(R)} \cdot dR \right]^2}} = s + s_0$$

$$(48') \quad \int \frac{\text{sh } R \cdot dR}{\sqrt{\text{sh}^2 R - \left[c + \int \frac{\text{sh } R}{f(R)} \cdot dR \right]^2}} = s + s_0,$$

s_0 étant une constante arbitraire.

En voulant introduire ici les coordonnées polaires, éliminons ds entre ces relations et les relations (6), (6') du § 23. On tombe ainsi sur deux équations différentielles, où les variables R et ω sont séparables.

Telle séparation effectuée, on obtient aussitôt par intégration

$$(49) \quad \int \frac{c + \int \frac{\sin R}{f(R)} \cdot dR}{\sin R \sqrt{\sin^2 R - \left[c + \int \frac{\sin R}{f(R)} \cdot dR \right]^2}} \cdot dR = \omega + \omega_0$$

$$(49') \quad \int \frac{c + \int \frac{\text{sh } R}{f(R)} \cdot dR}{\text{sh } R \sqrt{\text{sh}^2 R - \left[c + \int \frac{\text{sh } R}{f(R)} \cdot dR \right]^2}} \cdot dR = \omega + \omega_0,$$

ω_0 étant une constant arbitraire.

Cette analyse démontre que: *Sur les plans non-euclidiens, il y a toute une famille de lignes, où le rayon de courbure est lié au rayon vecteur par une relation finie. Ces lignes sont représentées par les équations [(47), (47')], [(48), (48')], [(49), (49')], suivant que l'on emploie les coordonnées (p, R) , les coordonnées radiales, ou les coordonnées polaires.*

§ 52

Applications. — 1.^o Le rayon de courbure d'une développante de cercle de rayon m est lié au rayon vecteur par la relation

$$\cos R = \cos m \cdot \cos p \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$\text{ch } R = \text{ch } m \cdot \text{ch } p \quad (\text{dans le p. l.})$$

Si l'on veut trouver toutes les lignes planes jouissant de même propriété, il suffit d'écrire les dernières équations sous la forme

$$\operatorname{tg} \rho = f(R) = \frac{\sqrt{\cos^2 m - \cos^2 R}}{\cos R}, \quad \operatorname{th} \rho = f(R) = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 R - \operatorname{ch}^2 m}}{\operatorname{ch} R},$$

en appliquant ensuite les équations (48), (48') ou (49), (49').

2.^o Les lignes euclidiennes d'équation polaire

$$R^m \cdot \cos(m\omega) = a^m,$$

où a et m sont des constantes, jouissent de plusieurs propriétés remarquables, telles que les suivantes: *Le rayon de courbure est proportionnel à une puissance du rayon vecteur.*

La projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est à ce vecteur dans un rapport constant.

En voulant déterminer les lignes non-euclidiennes jouissant de l'une ou de l'autre de ces propriétés, voila le procédé à suivre.

Dans le premier cas on doit avoir

$$\rho = a R^m,$$

a étant une constante. La ligne inconnue peut donc être déterminée à l'aide des équations (48) ou (49) en y faisant

$$f(R) = \operatorname{tg}(a R^m).$$

Dans le deuxième cas soit OA un rayon vecteur quelconque, AC la normale, C le centre de courbure et P le pied de la perpendiculaire abaissée du point C sur le rayon vecteur.

S'il s'agit du plan riemannien, comme le triangle rectangle APC donne la relation

$$\operatorname{tg} AP = \operatorname{tg} AC \cdot \cos O\hat{A}C = \operatorname{tg} \rho \cdot \sin \theta,$$

on doit avoir

$$\frac{AP}{R} = \frac{1}{R} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} \rho \cdot \sin \theta) = a,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tg} \rho \cdot \sin \theta = \operatorname{tg}(a R),$$

a étant une constante.

En remarquant que

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2},$$

on voit que le problème est réduit à l'intégration de l'équation différentielle

$$\operatorname{tg} \rho \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2} = \operatorname{tg} (aR).$$

§ 53

Coordonnées (q, s). — La distance $OQ \equiv q$ [figure (25)] entre le pôle O et la normale générique AN d'une ligne plane (inconnue) soit une fonction donnée de l'arc s .

Si le plan est riemannien, le triangle rectangle AQO donne la relation

$$\sin q = \sin R \cdot \cos \theta = \sin R \cdot \frac{dR}{ds},$$

d'où l'on tire

$$\sin R \cdot dR = \sin q \cdot ds,$$

et d'ici par intégration

$$(50) \quad \cos R = c - \int \sin q \cdot ds,$$

c étant une constante.

Dans le plan lobatschewskien on a la formule analogue

$$(50') \quad \operatorname{ch} R = c - \int \operatorname{sh} q \cdot ds.$$

La présence de la constante arbitraire c dans ces équations démontre que toute relation finie entre q et s est vérifiée par une entière famille de lignes.

La détermination d'une telle famille de courbes se fait à l'aide des formules du § 46.

§ 54

Coordonnées (θ, ω). — Supposons qu'entre l'inclinaison θ d'une ligne (inconnue) sur les rayons vecteurs issus du pôle, et l'angle polaire ω subsiste la relation finie

$$(51) \quad \omega = f(\theta).$$

Si $OA = R$, $OB = R + dR$ sont deux vecteurs consécutifs et AM l'arc circulaire infiniment petit de centre O et de rayon R intercepté par ces rayons, on a

$$AM = \sin R \, d\omega = \sin R \cdot f'(\theta) \, d\theta, \quad AM = dR \cdot \operatorname{tg} \theta,$$

et conséquemment

$$\frac{dR}{\sin R} = \frac{f'(\theta)}{\operatorname{tg} \theta} \cdot d\theta.$$

On obtient d'ici par intégration

$$(52) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} \right) = c \cdot e^{\int \frac{f'(\theta)}{\operatorname{tg} \theta} \cdot d\theta},$$

c étant une constante arbitraire.

Dans le plan lobatschewskien on a d'une façon analogue

$$(52') \quad \operatorname{th} \left(\frac{R}{2} \right) = c \cdot e^{\int \frac{f'(\theta)}{\operatorname{tg} \theta} \cdot d\theta}.$$

On voit d'ici que la relation finie générique (51) définit toute une famille de lignes.

L'équation polaire de ces lignes est le résultat de l'élimination de θ entre les équations (51), (52), (52').

Dans le cas particulier $\omega = f(\theta) = a\theta$, avec a constante, les équations (52), (52') sont remplacées par les autres

$$(53) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. = c \sin \theta = c \sin \left(\frac{\omega}{a} \right).$$

$$(53') \quad \operatorname{th} \left(\frac{R}{2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

§ 55

Courbes sectrices. — Dans l'hypothèse que a soit un nombre entier et positif n , on a $\theta = \frac{\omega}{n}$, et les lignes (53), (53') peuvent évidemment servir à partager graphiquement un angle donné en n parties égales.

Mais les formules du § 54 nous apprennent à déterminer, plus généralement, la ligne servant à la construction graphique d'un angle lié à un angle donné par une relation finie arbitraire.

Que l'on veuille, par exemple, trouver les lignes non-euclidiennes à l'aide desquelles on peut réaliser une construction graphique pour passer d'un angle quelconque ω à l'angle θ défini par la relation

$$(54) \quad \theta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\omega} - \frac{\pi}{2}.$$

Résolvons d'abord (54) par rapport à ω , ce qui donne

$$\omega = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

En éliminant θ entre l'équation (54) et les autres

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} \right) \\ \operatorname{th} \left(\frac{R}{2} \right) \end{array} \right\} = c \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

que l'on déduit des formules (52), (52'), on trouve pour équations polaires des lignes cherchées :

$$(55) \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} \right) \\ \operatorname{th} \left(\frac{R}{2} \right) \end{array} \right\} = c \cdot \operatorname{th} \left(\frac{\omega}{2} \right).$$

Ces lignes dessinées, la construction graphique résolvant le problème est évidente.

Remarque. — Dans le cas particulier $c = 1$, l'équation (55') revient à l'autre

$$R = \omega,$$

définissant une particulière spirale d'ARCHIMÈDE (§ 35).

§ 56

Coordonnées (θ, s) . — L'inclinaison θ du rayon vecteur sur une ligne L (inconnue) soit liée à l'arc s par la relation finie

$$(56) \quad \theta = f(s).$$

Sachant que $\frac{dR}{ds} = \cos \theta$, l'élimination de θ entre ces deux équations conduit à l'équation différentielle

$$dR = \cos \theta \cdot ds = \cos [f(s)] \cdot ds,$$

d'où il suit par intégration

$$(57) \quad R = c + \int \cos [f(s)] ds,$$

c étant une constante arbitraire.

Telle est l'équation de la ligne cherchée L, en coordonnées radiales.

La présence de la constante arbitraire c nous apprend qu'à la relation finie générique (56) correspond une entière famille de lignes.

A l'occasion du problème que l'on vient de résoudre, on peut faire cette intéressante remarque :

Tout résultat qui correspond à une formule contenant exclusivement l'angle θ et l'arc s vaut indifféremment dans les trois géométries.

§ 57

Applications. — 1.° Si l'on applique l'équation (57) dans le cas particulier

$$\theta = f(s) = \frac{s}{m},$$

m étant une constante, on a le résultat suivant : *Les lignes planes coupées par les rayons vecteurs issus d'un point fixe (origine) sous un angle θ proportionnel à l'arc, sont représentées (en coordonnées radiales) par l'équation*

$$(58) \quad R = m \cdot \sin \left(\frac{s}{m} \right) + c,$$

quelle que soit la nature du plan.

Entre les lignes euclidiennes de la famille (58) il y a le cercle de rayon $\frac{m}{2}$ passant par le pôle, correspondant au cas particulier $c = 0$.

2.° Si l'on pose la condition que le cosinus de l'inclinaison θ soit proportionnelle à l'arc, on doit prendre

$$f(s) = \arccos \left(\frac{2s}{m} \right),$$

m étant une constante, et l'on trouve pour équation de la ligne cherchée

$$(59) \quad R = \frac{s^2}{m} + c,$$

quelle que soit la nature du plan.

Dans le cas particulier $c = 0$, la ligne euclidienne (59) se réduit à la spirale représentée par l'équation polaire

$$\sqrt{\frac{a-R}{R}} + \arcsin \sqrt{\frac{R}{a}} = -\frac{\omega}{2}.$$

3.^o L'équation (57), dans l'hypothèse $\theta = \text{constante}$, démontre que la spirale isogonale (euclidienne ou non) est représentée par une relation linéaire entre le rayon vecteur et l'arc (§ 39).

§ 58

Expression des coordonnées des points d'une ligne plane en fonction de l'arc. — La deuxième coordonnée géographique v (latitude) relative aux points d'une ligne non-euclidienne, soit une fonction connue de l'arc

$$v = \lambda(s).$$

En ayant recours aux formules (8), (8') du § 23, on trouve pour expression de la différentielle de la première coordonnée géographique u (longitude)

$$du = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\lambda'^2(s)}}{\cos \lambda(s)} \cdot ds \\ \frac{\sqrt{1-\lambda'^2(s)}}{\operatorname{ch} \lambda(s)} \cdot ds. \end{cases}$$

Il s'ensuit que les coordonnées géographiques d'un point quelconque d'une ligne plane s'expriment, en fonction de l'arc, par les équations

$$(60) \quad v = \lambda(s), \quad u = c + \int \frac{\sqrt{1-\lambda'^2(s)}}{\cos \lambda(s)} \cdot ds \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(60') \quad v = \lambda(s), \quad v = c + \int \frac{\sqrt{1-\lambda'^2(s)}}{\operatorname{ch} \lambda(s)} \cdot ds \quad (\text{dans le p. l.})$$

c étant une constante arbitraire et $\lambda(s)$ une fonction de l'arc assujettie à la seule condition $\lambda'(s) \leq 1$.

Cela démontre qu'une ligne plane est déterminée, aussitôt que l'on donne une relation finie quelconque entre la latitude v et l'arc.

Si au contraire c'est la longitude u que s'exprime par une fonction connue de l'arc $\mu(s)$, il résulte

$$u = \mu(s) = c + \int \frac{\sqrt{1-v'^2}}{\cos v} ds,$$

de sorte que le calcul de la latitude v , d'où dépend la détermination de la ligne, est ramenée à l'intégration de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \mu'^2(s) \cdot \cos^2 v = 1.$$

Soient (fig. 1)

$$OA = u, \quad AM = v$$

les coordonnées géographiques et

$$BM = p, \quad AM = q$$

les coordonnées normales d'un point quelconque M d'un plan riemannien.

Le quadrilatère trirectangle OABM donne la relation

$$\sin p = \sin u \cdot \cos v.$$

Si donc on a recours aux équations (60), et que l'on fasse des considérations analogues dans le plan lobatschewskien, on trouve que: *Les coordonnées normales (p, q) d'un point quelconque d'une ligne plane s'expriment en fonction de l'arc par les relations :*

$$(A) \quad \begin{cases} q = \lambda(s) \\ p = \cos \lambda(s) \cdot \sin \left[c + \int \frac{\sqrt{1-\lambda'^2(s)}}{\cos \lambda(s)} \cdot ds \right] \end{cases} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(A') \quad \begin{cases} q = \lambda(s) \\ p = \operatorname{ch} \lambda(s) \cdot \operatorname{sh} \left[c + \int \frac{\sqrt{1-\lambda'^2(s)}}{\operatorname{ch} \lambda(s)} \cdot ds \right] \end{cases} \quad (\text{dans le p. l.})$$

c étant une constante arbitraire et $\lambda(s)$ une fonction de l'arc, assujettie à la seule condition $\lambda'(s) \leq 1$.

§ 59

Applications. — 1° *Trajectoire isogonale (sous l'angle θ) d'un système d'ordonnées perpendiculaires à une droite fixe (axe Ox).*

AA' , BB' étant deux ordonnées successives et AC la perpendiculaire abaissée du point A sur BB' , le triangle rectangle infiniment petit ACB donne

$$BC = AB \cdot \cos \theta,$$

c'est-à-dire

$$dv = ds \cdot \cos \theta,$$

d'où il suit par intégration

$$(61) \quad v = s \cdot \cos \theta + k,$$

k étant une constante.

Quant à u , on déduit des relations (60), (60')

$$(62) \quad u = c + \operatorname{tg} \theta \cdot \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{s \cdot \cos \theta}{2} \right)$$

$$(62') \quad u = c + \operatorname{tg} \theta \cdot \log \operatorname{th} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{s \cdot \cos \theta}{2} \right).$$

La trajectoire est ainsi déterminée.

L'élimination de s entre les égalités (61), (62), (62') conduit aux équations

$$(63) \quad u = c + \operatorname{tg} \theta \cdot \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{v - k}{2} \right)$$

$$(63') \quad u = c + \operatorname{tg} \theta \cdot \log \operatorname{th} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{v - k}{2} \right)$$

définissant la trajectoire en coordonnées géographiques.

En supposant pour simplifier $c = 0$, $k = 0$ et en introduisant les coordonnées $\zeta = \operatorname{tg} x$, $\eta = \operatorname{tg} y$ à l'aide des formules de transformation du § 3, l'équation (63) revient à l'autre

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \theta \cdot \log \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\eta}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \right) \right].$$

Si l'on parte de l'équation (63'), on arrive à une relation analogue.

Cela démontre que *sur les plans non-euclidiens une trajectoire isogonale d'un système d'ordonnées orthogonales à une droite fixe, est une ligne transcendante.*

2° *Droite.* — Soit r une droite passant par l'origine et inclinée de l'angle ε sur l'axe Ox . Si $AA' = v$ est la latitude d'un point quelconque de r correspondant à la longitude $OA' = u$ et s le segment OA , le triangle rectangle $OA'A$ démontre que *les coordonnées géographiques du point A sont exprimables en fonction de s par les équations*

$$(64) \quad \sin v = \sin s \cdot \sin \varepsilon, \quad \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} s \cdot \cos \varepsilon \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(64') \quad \operatorname{sh} v = \operatorname{sh} s \cdot \sin \varepsilon, \quad \operatorname{th} u = \operatorname{th} s \cdot \cos \varepsilon \quad (\text{dans le p. l.}).$$

3° *Cercle.* — Si $OA' = u$, $A'A = v$ sont les coordonnées géographiques d'un point arbitraire A d'un cercle de rayon r , dont le centre est à l'origine, le triangle rectangle $OA'A$ donne une des relations

$$(65) \quad \cos u \cos v = \cos r$$

$$(65') \quad \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v = \operatorname{ch} r,$$

suitant la nature du plan. — Ce sont les équations des cercles non-euclidiens en coordonnées géographiques.

En différentiant l'équation résultant de l'élimination de u entre (65) et la deuxième équation (60), on obtient la relation

$$\frac{\sin r \cdot \cos \lambda}{\sqrt{\cos^2 \lambda - \cos^2 r}} \cdot d\lambda = ds,$$

d'où il suit par intégration

$$\sin r \cdot \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\sin \lambda}{\sin r} \right) = s + s_0,$$

et enfin

$$(66) \quad \sin \lambda(s) = \sin r \cdot \sin \left(\frac{s + s_0}{\sin r} \right),$$

s_0 étant une constante arbitraire.

Quant à u , la deuxième équation (60) donne:

$$(67) \quad u = \cos r \int \frac{\sin \left(\frac{s+s_0}{\sin r} \right)}{\cos^2 r + \sin^2 r \cos^2 \left(\frac{s+s_0}{\sin r} \right)} ds \\ = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg} r \cdot \cos \left(\frac{s+s_0}{\sin r} \right) \right].$$

On conclut d'ici que *dans le cercle riemannien ont lieu les relations*

$$(68) \quad \sin v = \sin r \cdot \sin \left(\frac{s+s_0}{\sin r} \right), \quad \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} r \cdot \cos \left(\frac{s+s_0}{\sin r} \right).$$

Dans le plan lobatschewskien, les relations (66), (77) sont remplacées par les autres

$$\operatorname{sh} \lambda = \operatorname{sh} r \cdot \sin \left(\frac{s+s_0}{\operatorname{sh} r} \right), \quad u = \log \sqrt{\frac{1 - \operatorname{th} r \cdot \cos \left(\frac{s+s_0}{\operatorname{sh} r} \right)}{1 + \operatorname{th} r \cdot \cos \left(\frac{s+s_0}{\operatorname{sh} r} \right)}}.$$

Mais comme la dernière équation donne

$$\operatorname{th} r \cdot \cos \left(\frac{s+s_0}{\operatorname{sh} r} \right) = \frac{1 - e^{2u}}{1 + e^{2u}} = -\operatorname{th} u,$$

on conclut que *dans le cercle lobatschewskien ont lieu les relations*

$$(68') \quad \operatorname{sh} v = \operatorname{sh} r \cdot \sin \left(\frac{s+s_0}{\operatorname{sh} r} \right), \quad \operatorname{th} u = \operatorname{th} r \cdot \cos \left(\frac{s+s_0}{\operatorname{sh} r} \right).$$

§ 59 bis

Supposons que la tangente et la normale à un point quelconque A d'une ligne plane L coupent l'axe Ox aux points T et N.

Soit en outre AB la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite Ox .

Si pour la détermination de L on fait usage des coordonnées

..

géographiques

$$OB = u, \quad BA = v,$$

l'inclinaison i de la ligne L sur les ordonnées AB est définie par la relation

$$\cos i = \frac{dv}{ds},$$

s étant l'arc. — En remarquant donc que les triangles rectangles ABT, ABN donnent les égalités

$$\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} AB = \operatorname{tg} AT \cdot \cos i = \operatorname{tg} AN \cdot \sin i$$

$$\sin v = \sin AB = \frac{\operatorname{tg} BT}{\operatorname{tg} i} = \frac{\operatorname{tg} BN}{\cot i},$$

on trouve que les longueurs de la tangente AT, de la normale AN, de la sous-tangente BT et de la sous-normale BN sont définies par les équations :

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} AT = \frac{\operatorname{tg} v}{\frac{dv}{ds}}, \quad \operatorname{tg} AN = \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}} \\ \operatorname{tg} BT = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}}{\frac{dv}{ds}} \cdot \sin v, \quad \operatorname{tg} BN = \frac{\frac{dv}{ds}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}} \cdot \sin v. \end{array} \right.$$

Dans le plan lobatschewskien on a des formules analogues.

Applications. — 1° Si l'on suppose $AT = \text{constante} = a$, la première équation (B) donne

$$\frac{dv}{\operatorname{tg} v} = \frac{ds}{\operatorname{tg} a},$$

d'où il suit par intégration

$$(C) \quad \sin v = e^{\frac{s+s_0}{\operatorname{tg} a}},$$

s_0 étant une constante arbitraire.

Telle est l'équation de la tractrice riemannienne en coordonnées (v, s) .

Dans le plan lobatschewskien l'équation (C) est remplacée par l'autre analogue

$$(C') \quad \text{sh } v = e^{\frac{s+s_0}{a}}$$

Le segment constant a s'appelle le paramètre de la courbe, et la droite lieu de l'extrémité de ce segment, considéré dans ses positions successives (l'axe des x dans notre cas), en est la base.

Les deuxièmes membres des équations (C), (C') ont même forme

$$e^{\frac{s+s_0}{m}},$$

où m est la tangente circulaire ou hyperbolique de a , suivant que le plan est riemannien ou lobatschewskien. — Dans le premier cas le paramètre a est réel quelle que soit la valeur de m ; dans le deuxième cas il est réel et fini, réel et infini, imaginaire suivant que

$$m \leq 1.$$

On conclut d'ici que les tractrices riemanniennes constituent une seule famille de courbes, et les tractrices lobatschewskiennes au contraire constituent trois familles de lignes, suivant que les tangentes ont une longueur (constante) réelle et finie, réelle et infinie, imaginaire.

2° Dans l'hypothèse $AN = a$, a étant une constante, la deuxième équation (B) donne après quelques calculs:

$$\frac{dv}{\sqrt{1 - \cot^2 a \cdot \text{tg}^2 v}} = ds,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\cos v \cdot dv}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin v}{\sin a}\right)^2}} = ds.$$

On déduit d'ici par intégration

$$\sin a \cdot \text{arc sin} \left(\frac{\sin v}{\sin a} \right) = s + s_0,$$

et enfin

$$\sin v = \sin a \cdot \sin \left(\frac{s + s_0}{\sin a} \right),$$

s_0 étant une constante arbitraire.

Cette relation et l'autre analogue

$$\operatorname{sh} v = \operatorname{sh} a \cdot \sin \left(\frac{s + s_0}{\operatorname{sh} a} \right)$$

que l'on obtient par un procédé semblable dans le plan lobatschewskien, comparées respectivement aux premières équations (68), (68'), démontrent que *même sur les plans non-euclidiens, la ligne dans laquelle la normale a une longueur constante a, est le cercle de rayon a.*

§ 60

Si dans les équations (1), (1') du § 23 on fait la transformation

$$(69) \quad \xi = H \cdot \cos \varphi, \quad \eta = H \sin \varphi,$$

H et φ étant deux fonctions de l'arc, on obtient respectivement

$$\varphi' = \sqrt{\frac{(1 + H^2)^2 - H'^2}{1 + H^2}} \cdot \frac{1}{H}, \quad \varphi' = \sqrt{\frac{(1 - H^2)^2 - H'^2}{1 - H^2}} \cdot \frac{1}{H}.$$

Ces relations, multipliées par ds et intégrées, démontrent que: *Les coordonnées (ξ, η) d'un point quelconque d'une ligne plane non-euclidienne s'expriment en fonction de l'arc par les équations*

$$(70) \quad \begin{cases} \xi = H \cdot \cos \left[c + \int \sqrt{\frac{(1 + H^2)^2 - H'^2}{1 + H^2}} \cdot \frac{ds}{H} \right] \\ \eta = H \cdot \sin \left[c + \int \sqrt{\frac{(1 + H^2)^2 - H'^2}{1 + H^2}} \cdot \frac{ds}{H} \right] \end{cases} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(70') \quad \begin{cases} \xi = H \cdot \cos \left[c + \int \sqrt{\frac{(1 - H^2)^2 - H'^2}{1 - H^2}} \cdot \frac{ds}{H} \right] \\ \eta = H \cdot \sin \left[c + \int \sqrt{\frac{(1 - H^2)^2 - H'^2}{1 - H^2}} \cdot \frac{ds}{H} \right] \end{cases} \quad (\text{dans le p. l.})$$

c étant une constante et H une fonction arbitraire de l'arc.

Si l'on veut introduire ici le rayon vecteur R allant de l'ori-

gine à un point quelconque de la ligne, il faut remarquer que l'on a (§ 2)

$$H = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \begin{cases} \operatorname{tg} R \\ \operatorname{th} R \end{cases}$$

suivant que le plan est riemannien ou lobatschewskien.

On trouve ainsi que les équations (70), (70') sont remplacées par les autres

$$(71) \quad \begin{cases} \xi = \operatorname{tg} R \cdot \cos \left(c + \int \frac{\sqrt{1-R'^2}}{\sin R} ds \right), \\ \eta = \operatorname{tg} R \cdot \sin \left(c + \int \frac{\sqrt{1-R'^2}}{\sin R} ds \right) \end{cases} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(71') \quad \begin{cases} \xi = \operatorname{th} R \cdot \cos \left(c + \int \frac{\sqrt{1-R'^2}}{\operatorname{sh} R} ds \right), \\ \eta = \operatorname{th} R \cdot \sin \left(c + \int \frac{\sqrt{1-R'^2}}{\operatorname{sh} R} ds \right) \end{cases} \quad (\text{dans le p. l.})$$

Dans le cas particulier $R = \text{const.}$ les équations (71), (71') reviennent aux autres

$$\begin{aligned} \xi &= \operatorname{tg} R \cdot \cos \left(\frac{s+s_0}{\sin R} \right), & \eta &= \operatorname{tg} R \cdot \sin \left(\frac{s+s_0}{\sin R} \right) \\ \xi &= \operatorname{th} R \cdot \cos \left(\frac{s-s_0}{\operatorname{sh} R} \right), & \eta &= \operatorname{th} R \cdot \sin \left(\frac{s+s_0}{\operatorname{sh} R} \right) \end{aligned}$$

qui caractérisent les cercles non-euclidiens de rayon R (1).

CHAPITRE V

§ 61

Enveloppe d'une suite de droites. — Par les points successifs A, B, C, d'une ligne plane L on mène une série de droi-

(1) Ces équations sont tout-à-fait analogues aux équations $\xi = R \cdot \cos \left(\frac{s+s_0}{R} \right)$
 $\eta = R \cdot \sin \left(\frac{s+s_0}{R} \right)$ définissant le cercle euclidien de rayon R .

tes, dont l'inclinaison i sur la ligne est une fonction finie et continue de l'arc. — Ces droites enveloppent une autre ligne L_1 , en la touchant successivement aux points A_1, B_1, C_1, \dots .

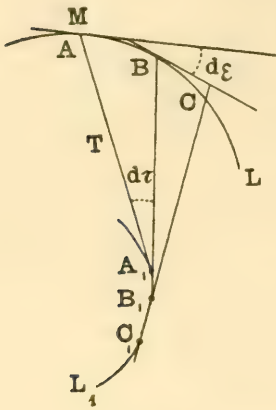


Fig. 28

Nous nous proposons de trouver la distance T entre les points correspondants des lignes L, L_1 .

Soient AA_1, BB_1 deux droites consécutives, $d\tau$ leur angle $\widehat{AA_1B}$, et ds l'arc infiniment petit AB .

La figure A_1AB , que l'on peut regarder comme un triangle, donne la proportion

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{\sin T}{\sin i},$$

d'où il suit

$$(1) \quad d\tau = \frac{\sin i \cdot ds}{\sin T}.$$

Or si l'on construit les tangentes aux points A, B de la ligne, ces droites se coupent à un certain point M ; et si l'on désigne par $d\varepsilon$ l'angle de contingence de L en A , le quadrilatère A_1AMB a les angles $d\tau, i, \pi - (i + di), \pi - d\varepsilon$, de sorte que son aire (s'il est riemannien) a pour expression l'excès angulaire

$$d\tau - di - d\varepsilon.$$

D'ailleurs elle peut être égale à l'aire

$$(1 - \cos T) d\tau$$

du secteur A_1AB , leur différence étant un infiniment petit d'ordre supérieur.

On a donc la relation

$$d\tau - di - d\varepsilon = (1 - \cos T) \cdot d\tau,$$

d'où il suit

$$(2) \quad d\tau = \frac{d\varepsilon + di}{\cos T}.$$

En comparant les deux expressions (1), (2) de $d\tau$, on obtient

la formule cherchée

$$(3) \quad \operatorname{tg} T = \frac{\sin i \cdot ds}{d\varepsilon + di} = \frac{\sin i}{\cot \rho + \frac{di}{ds}}.$$

Dans le plan lobatschewskien l'équation (3) est remplacée par l'autre

$$(3') \quad \operatorname{th} T = \frac{\sin i \cdot ds}{d\varepsilon + di} = \frac{\sin i}{\cot h\rho + \frac{di}{ds}}.$$

L'emploi des relations (3), (3'), dans la construction de l'enveloppe L_1 , n'a pas besoin d'être expliqué.

§ 62

Trajectoire isogonale des tangentes. — Soient: L la ligne donnée, L_1 la trajectoire et $AA_1 = T$, $BB_1 = T + dT$ deux tangentes consécutives de L . Si l'on décrit l'arc circulaire A_1M de centre A , de rayon T et compris entre les deux tangentes, la figure, dans l'hypothèse du plan riemannien, donne

$$M_1B = BB_1 - BM = BB_1 - (AM - AB)$$

$$= (BB_1 - AA_1) + AB = dT + ds$$

$$MA_1 = \sin AA_1 \cdot \text{Angle}(A_1AB_1) = \sin T \cdot d\varepsilon,$$

$d\varepsilon$ étant l'angle de contingence de la ligne L au point A . Mais comme $d\varepsilon = \frac{ds}{\operatorname{tg} \rho}$, on a

$$MA_1 = \sin T \cdot \frac{ds}{\operatorname{tg} \rho},$$

de sorte que si l'on désigne par i l'inclinaison constante de L_1 sur les tangentes de L , le triangle rectangle infiniment petit A_1MB_1 fournit la relation

$$\cot i = \frac{MB_1}{MA_1} = \frac{\operatorname{tg} \rho}{\sin T} \left(\frac{dT}{ds} + 1 \right).$$

Il s'ensuit que le segment T vérifie l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dT}{ds} - \frac{\cot i}{\operatorname{tg} \rho} \sin T + 1 = 0.$$

On déduit en outre de la figure

$$ds_1 = A_1 B_1 = \frac{A_1 M}{\sin i},$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad ds_1 = \frac{\sin T}{\sin i \cdot \operatorname{tg} \rho} ds.$$

Quant au rayon de courbure ρ_1 de la trajectoire L_1 , il peut être calculé à l'aide de la relation (3), en y supposant i constant. On a donc

$$(6) \quad \operatorname{tg} \rho_1 = \frac{\operatorname{tg} T}{\sin i}.$$

Or si l'on réussit à intégrer l'équation (4), l'élimination de s entre les équations (5), (6) conduit à une relation finie et connue entre ρ_1 et s_1 , ce qui suffit (§ 43) à déterminer la ligne L_1 .

Cette analyse démontre que la détermination des trajectoires isogonales des tangentes de la ligne L est ramenée à l'intégration de l'équation différentielle (4).

Dans le plan lobatschewskien on a des résultats analogues.

§ 63

L'intégration effective de l'équation différentielle (4), impossible dans le cas général, se réduit aux quadratures, aussitôt que l'on en connaît une intégrale particulière.

Si en effet φ est cette intégrale, on doit avoir la relation

$$\frac{d\varphi}{ds} - \frac{\cot i}{\operatorname{tg} \rho} \cdot \sin \varphi + 1 = 0,$$

qui retranchée de l'équation (4) donne

$$\frac{d(T - \varphi)}{ds} - \frac{\cot i}{\operatorname{tg} \rho} (\sin T - \sin \varphi) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{d \frac{1}{2} (T - \varphi)}{ds} - \frac{\cot i}{\operatorname{tg} \rho} \cdot \sin \frac{1}{2} (T - \varphi) \cos \frac{1}{2} (T - \varphi) \cos \varphi \\ + \frac{\cot i}{\operatorname{tg} \rho} \sin^2 \frac{1}{2} (T - \varphi) \cdot \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

et en divisant par $\sin^2 \frac{1}{2}(T - \varphi)$:

$$\frac{d \frac{1}{2}(T - \varphi)}{\sin^2 \frac{1}{2}(T - \varphi)} - \frac{\cot i}{\operatorname{tg} \rho} \cos \varphi \cdot \cot \frac{1}{2}(T - \varphi) + \frac{\cot i}{\operatorname{tg} \rho} \sin \varphi = 0.$$

Or comme, en posant $\cot \frac{1}{2}(T - \varphi) = t$, l'équation ci-dessus se réduit à l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{dt}{ds} - \cot i \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \rho} \cdot t + \cot i \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \rho} = 0$$

que l'on peut intégrer par le procédé ordinaire, on conclut que *dans le cas actuel la fonction T, intégrale générale de l'équation différentielle (4), est donnée par la relation*

$$\cot \frac{1}{2}(T - \varphi) = \left(c - \cot i \int \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \rho} \cdot e^{-\cot i \int \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \rho} ds} \right) e^{\cot i \int \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \rho} ds},$$

c étant une constante arbitraire.

§ 64

Voici une interprétation géométrique de l'équation (6).

A, A₁ étant deux points correspondants des lignes L, L₁, élevons la perpendiculaire à la droite A₁A au point A, en la prolongeant jusqu'à son rencontre A₀ avec la normale à la ligne L₁ en A₁.

La relation

$$\operatorname{tg} A_1 A_0 = \frac{\operatorname{tg} A A_1}{\cos (\widehat{A A_1 A_0})} = \frac{\operatorname{tg} T}{\sin i}$$

que l'on déduit du triangle rectangle A₁AA₀, comparée à l'équation (6), démontre que l'on a A₁A₀ = ρ₁.

Cette formule prouve que : *Si par les points successifs d'une ligne plane quelconque on mène une suite de droites inclinées d'un angle constant sur la ligne, le point où l'une quelconque de*

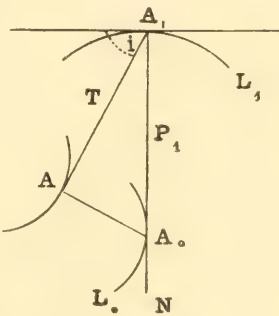


Fig. 29

ces droites touche l'enveloppe s'obtient en abaissant du centre de courbure correspondant de la ligne donnée la perpendiculaire sur la droite considérée.

Cette propriété vaut indifféremment dans les trois plans.

§ 65

Développantes. — Les formules relatives aux développantes de la ligne L (trajectoires orthogonales des tangentes) sont déduites des relations (4), (5), (6), en y supposant $i = \frac{\pi}{2}$.

On obtient ainsi

$$\frac{dT}{ds} = 1, \quad ds_1 = \frac{\sin T}{\operatorname{tg} \rho} ds, \quad \operatorname{tg} \rho_1 = \operatorname{tg} T.$$

Or comme la première de ces équations donne par intégration

$$(7) \quad T = c - s,$$

c étant une constante arbitraire, les autres équations se réduisent à la forme

$$(8) \quad s_1 = \int \frac{\sin(c-s)}{\operatorname{tg} \rho} \cdot ds, \quad \rho_1 = c - s.$$

Les (7), (8) sont les formules relatives aux développantes.

L'équation, en coordonnées intrinsèques, d'une quelconque de ces développantes est le résultat de l'élimination de s entre les équations (8).

La deuxième équation (8) démontre qu'un arc quelconque de la développée d'une ligne non-euclidienne est égal à la différence entre les rayons de courbure extrêmes de la développante.

En appliquant une telle propriété, on peut réaliser la description mécanique de la développante au moyen d'un fil flexible et inextensible enroulé d'abord sur la développée, conformément à ce que l'on fait dans le plan ordinaire.

Dans le plan lobatschewskien, on a des formules analogues.

Exemple. — Si l'on suppose $\rho = \text{constante} = r$, les équations (8) reviennent aux autres

$$s_1 = - \frac{\cos(c-s)}{\operatorname{tg} r}, \quad \rho_1 = c - s,$$

d'où il suit, en éliminant s :

$$\cos \rho_1 = -s_1 \operatorname{tg} r.$$

Cette formule et son analogue du plan lobatschewskien démontrent que : *La développante d'un cercle* $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannien} \\ \text{lobatschewskien} \end{array} \right\}$ *est caractérisée par la propriété que le cosinus* $\left\{ \begin{array}{l} \text{circulaire} \\ \text{hyperbolique} \end{array} \right\}$ *du rayon de courbure est une fonction linéaire de l'arc* (voir le § 47).

§ 66

Développôides. — La courbe L_1 enveloppée par une suite de droites inclinées d'un angle constant i sur une ligne donnée L , s'appelle *développôide* si $i \geq \frac{\pi}{2}$, *développée* (ou *évolue*) si $i = \frac{\pi}{2}$.

En désignant par T et ρ_1 la distance entre les couples de points correspondants des lignes L , L_1 et le rayon de courbure de L_1 , les équations (4), (5), (6) reviennent aux autres.

$$(9) \quad \frac{dT}{ds_1} - \cot i \operatorname{tg} \rho_1 \sin T + 1 = 0, \quad ds = \frac{\sin T}{\sin i \cdot \operatorname{tg} \rho_1} ds_1, \quad \operatorname{tg} \rho = \frac{\operatorname{tg} T}{\sin i}.$$

En éliminant ds_1 entre ces équations, on obtient

$$(10) \quad \operatorname{tg} \rho_1 = \frac{\left(\cos i - \frac{dT}{ds} \right) \sin T}{\sin i}.$$

D'ailleurs en intégrant l'équation résultant de l'élimination de $\operatorname{tg} \rho_1$, entre (10) et la deuxième relation (9), on trouve

$$(11) \quad s_1 = c + \int \left(\cos i - \frac{dT}{ds} \right) ds,$$

c étant une constante arbitraire.

En écrivant enfin la troisième équation (9) sous la forme

$$(12) \quad \operatorname{tg} T = \sin i \cdot \operatorname{tg} \rho,$$

on a tout ce qui est nécessaire pour réduire la recherche des développôides d'une ligne aux quadratures.

En effet les équations (10), (11), en vertu de la relation (12), donnent $\operatorname{tg} \rho_1$ et s_1 en fonction de s . Si donc on élimine ce paramètre entre les deux équations, on obtient une relation finie connue entre $\operatorname{tg} \rho_1$ et l'arc s_1 de la développée L_1 , ce qui suffit pour la détermination de cette ligne (§ 43).

Dans le plan lobatschewskien on a des formules analogues.

Remarque. — Comme deux droites riemanniennes quelconques ont deux points en commun, il est évident que, quelle que soit l'inclinaison i , une ligne plane riemannienne admet toujours deux développées. Ces courbes se correspondent point par point de façon, que deux points correspondants constituent toujours une couple de points opposés.

§ 67

Développées. — Dans l'hypothèse $i = \frac{\pi}{2}$ les équations (12), (10), (11) reviennent aux autres

$$T = \rho$$

$$(13) \quad \operatorname{tg} \rho_1 = -\sin \rho \cdot \frac{d\rho}{ds}, \quad s_1 = c - \rho.$$

Il suit d'ici que l'équation (en coordonnées intrinsèques) de la développée L_1 est le résultat de l'élimination de l'arc s entre les équations (13).

Pour la développée d'une ligne lobatschewskienne, on a des formules analogues.

La relation entre les rayons de courbure d'une ligne plane et de sa développée peut être démontrée aussi directement, en s'appuyant sur les équations (26), (26') du § 30.

Ecrivons en effet l'équation (26) sous la forme

$$\left(\frac{d\tau}{ds_1}\right)^2 \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = 1,$$

s_1 étant l'arc de la développée. — En remarquant alors que

$$\operatorname{tg} \rho_1 = \frac{d\tau}{ds_1}, \quad ds_1 = d\rho,$$

la formule ci-dessus revient bien à l'autre

$$(14) \quad \operatorname{tg} \rho_1 = \pm \sin \rho \cdot \frac{d\rho}{ds}.$$

Remarque. — Cette relation et l'autre analogue

$$(14') \quad \text{th } \rho_1 = \pm \text{sh } \rho \cdot \frac{d\rho}{ds}$$

du plan lobatschewskien sont remplacées, dans le plan euclidien, par la relation plus simple

$$(14'') \quad \rho_1 = \pm \rho \frac{d\rho}{ds}$$

§ 68

Applications. — 1° Si les rayons de courbure d'une ligne riemannienne et de sa développée vérifient la relation

$$\text{tg } \rho_1 = a \cdot \text{tg } \rho ,$$

avec a constante, l'équation (14) donne

$$\cos \rho \cdot d\rho = a \cdot ds ,$$

et conséquemment la ligne cherchée est définie par l'équation intrinsèque

$$\sin \rho = as + b ,$$

b étant une constante.

Dans le cas particulier $a = 1$, on a l'équation

$$\sin \rho = s + b ,$$

définissant la ligne riemannienne dont le rayon de courbure est égal au rayon de courbure correspondant de la développée.

2° S'il est à chercher la ligne dont le rayon de courbure est proportionnel au rayon de courbure correspondant de sa développée, la condition $\rho_1 = a\rho$ que l'on doit ici vérifier, en vertu de la relation (14) est réductible à la forme

$$\frac{\sin \rho}{\text{tg}(a\rho)} d\rho = ds .$$

Or comme l'on déduit d'ici par intégration

$$\int \frac{\sin \rho}{\text{tg}(a\rho)} \cdot d\rho = s + s_0 ,$$

s_0 étant une constante arbitraire, le problème est ramené aux quadratures.

Dans le cas particulier $a = \frac{1}{2}$ la ligne cherchée a pour équation

$$\rho + \sin \rho = s + s_0.$$

Résultats analogues dans le plan lobatschewskien.

(À suivre.)

SUR LES CENTRES DE COURBURE PRINCIPAUX DE TROIS QUADRIQUES HOMOFOCALES

PAR

C. SERVAIS

Professeur à l'Université de Gand

1. Soient n_1, n_2, n_3 , les normales au point M à trois quadriques homofocales $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ passant par ce point; N_1, N_2, N_3 , les traces de ces normales sur un plan de symétrie α ; A_2 et A_3 , B_1 et B_3 , C_1 et C_2 les centres de courbure principaux de $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ au point M; μ_1, μ_2, μ_3 les trois plans tangents $(n_2 n_3), (n_1 n_3), (n_1 n_2)$. En un point M d'une surface du second degré les deux centres de courbure principaux sont les pôles du plan tangent par rapport aux deux quadriques homofocales qui passent par M. Ainsi les pôles des plans μ_1, μ_2, μ_3 relativement aux surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sont :

$\mu_1)$ M, A_2, A_3 ; $\mu_2)$ B_1, M, B_3 ; $\mu_3)$ C_1, C_2, M .

Les pôles d'un plan relativement aux quadriques d'un faisceau tangentiel forment une ponctuelle projective à toutes les ponctuelles analogues; une face du tétraèdre conjugué commun contient des points correspondants de ces ponctuelles. Ainsi l'on a :

$$(MA_2A_3N_1) = (B_1MB_3N_2) = (C_1C_2MN_3).$$

Si l'on désigne par λ la valeur commune de ces rapports anharmoniques on a :

$$(MN_1A_2A_3) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}; \quad (MN_2B_3B_1) = \frac{1}{1 - \lambda}$$

par suite :

$$(MN_1 A_2 A_3) (MN_2 B_3 B_1) (MN_3 C_4 C_2) = -1.$$

En développant on a l'égalité :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{MN_1} - \frac{1}{MA_2} \right) \left(\frac{1}{MN_2} - \frac{1}{MB_3} \right) \left(\frac{1}{MN_3} - \frac{1}{MC_4} \right) \\ & + \left(\frac{1}{MN_1} - \frac{1}{MA_3} \right) \left(\frac{1}{MN_2} - \frac{1}{MB_1} \right) \left(\frac{1}{MN_3} - \frac{1}{MC_2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

En un point M commun à trois quadriques homofocales les normales MN_1 , MN_2 , MN_3 limitées à un même plan de symétrie, sont liées aux rayons de courbure principaux de ces surfaces par la relation :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{MN_1} - \frac{1}{MA_2} \right) \left(\frac{1}{MN_2} - \frac{1}{MB_3} \right) \left(\frac{1}{MN_3} - \frac{1}{MC_4} \right) \\ & + \left(\frac{1}{MN_1} - \frac{1}{MA_3} \right) \left(\frac{1}{MN_2} - \frac{1}{MB_1} \right) \left(\frac{1}{MN_3} - \frac{1}{MC_2} \right) = 0. \end{aligned}$$

2. Si on remplace le plan de symétrie par le plan à l'infini, qui est aussi une face du tétraèdre conjugué commun à Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 l'égalité précédente devient

$$MA_2 \cdot MB_3 \cdot MC_4 + MA_3 \cdot MB_1 \cdot MC_2 = 0.$$

En un point M commun à trois quadriques homofocales les rayons de courbure principaux sont liés par la relation :

$$MA_2 \cdot MB_3 \cdot MC_4 + MA_3 \cdot MB_1 \cdot MC_2 = 0$$

théorème connu.

3. D'après le théorème relatif aux ponctuelles des pôles de deux plans μ_1 et μ_2 on a aussi :

$$(MA_2 N_1 \infty) = (B_1 M N_2 \infty)$$

ou en développant :

$$\frac{MN_1}{MA_2} + \frac{MN_2}{MB_1} = 1.$$

En un point M commun à trois quadriques homofocales les nor-

males MN_1, MN_2, MN_3 et les rayons de courbure principaux sont liés par les relations:

$$\frac{MN_1}{MA_1} + \frac{MN_2}{MB_1} = 1; \quad \frac{MN_2}{MB_3} + \frac{MN_3}{MC_2} = 1; \quad \frac{MN_1}{MA_3} + \frac{MN_3}{MC_1} = 1.$$

4. La quadrique Σ_2 coupe la quadrique Σ_1 suivant une ligne de courbure (Δ) ; soient M et M' deux points quelconques de (Δ) ; N_1 et N'_1 , les traces des normales en M et M' à Σ_1 sur un plan de symétrie; A_2 et A'_2 les centres de courbure des sections principales en M et M' dont les plans sont normaux à la ligne de courbure (Δ) . Les points A_2 et A'_2 sont les pôles par rapport à Σ_2 des plans tangents à Σ_1 en M et M' . On a donc:

$$(MA_2N_1 \infty) = (M'A'_2N'_2 \infty)$$

et par conséquent:

$$MA_2 : MN_1 = M'A'_2 : M'N'_1.$$

Le long d'une ligne de courbure (Δ) d'une quadrique Σ_1 le rayon de courbure MA_2 de la section normale à cette courbe et la normale MN_1 à la surface, limitée à un plan de symétrie, varient dans un rapport constant.

5. Soient (ab) le plan de symétrie choisi M_1, A, N les projections des points M, A_2, N_1 sur l'axe a ; T le point $(\mu_1 a)$. Les points M, A_2, N_1 sont les pôles du plan μ_1 relativement aux quadriques Σ_1, Σ_2 et la conique focale (ab) ; par suite les plans projetant les points M, A_2, N_1 normalement sur l'axe a sont les plans polaires du point T par rapport à Σ_1, Σ_2 , et la conique focale (ab) . Dans le cas d'une quadrique à centre D on a:

$$DM_1 \cdot DT = P_{a_1}, \quad DA \cdot DT = P_{a_2}, \quad DN \cdot DT = P_{a_1} - P_{c_1}$$

P_{a_1}, P_{a_2} désignent les puissances des involutions de points conjugués sur l'axe a relativement à Σ_1, Σ_2 ; P_{c_1} celle de l'involution analogue sur l'axe c de la quadrique Σ_1 . On déduit de ces égalités:

$$DT \cdot M_1A = P_{a_2} - P_{a_1}, \quad DT \cdot M_1N = -P_{c_1}, \quad M_1A : M_1N = (P_{a_1} - P_{a_2}) : P_{c_1}$$

par conséquent

$$(1) \quad MA_2 : MN_1 = (P_{a_1} - P_{a_2}) : P_{c_1}.$$

..

Dans le cas d'un paraboloïde Σ_1 on a :

$$M_1T = 2S_1T; \quad AT = 2S_2T; \quad NT = 2F_2T$$

S_1 et S_2 étant les sommets de Σ_1 et Σ_2 , F_2 le foyer commun à leurs sections principales dans le plan de symétrie (ac). Par suite

$$M_1A = 2S_1S_2 \quad M_1N = 2S_1F_2$$

donc :

$$MA_2 : MN_1 = S_1S_2 : S_1F_2.$$

Ainsi : *Dans le cas d'une quadrique à centre ou d'un paraboloïde, le rapport $MA_2 : MN_1$ est égal à $(P_{a_1} - P_{a_2}) : P_{c_1}$ ou $S_1S_2 : S_1F_2$.*

6. On a de même :

$$MA_3 : MN_1 = (P_{a_1} - P_{a_3}) : P_{c_1} \quad \text{ou} \quad MA_3 : MN_1 = S_1S_3 : S_1F_2$$

par conséquent :

$$MA_2 : MA_3 = (P_{a_1} - P_{a_2}) : (P_{a_1} - P_{a_3}) \quad \text{ou} \quad MA_2 : MA_3 = S_1S_2 : S_1S_3$$

formules connues déduites analytiquement des expressions des rayons de courbure principaux en fonction des coordonnées elliptiques du point M.

7. Soient D_1 la projection du centre D sur le plan μ_1 ; δ_1 le segment D_1D compté dans le sens de la semi-normale MN_1 on a :

$$MN_1 \cdot \delta_1 = P_{c_1}$$

et par suite :

$$MA_2 \cdot \delta_1 = P_{a_1} - P_{a_2}.$$

On a de même si δ_2 désigne le segment analogue à δ_1 , relatif au plan μ_2 :

$$MB_1 \cdot \delta_2 = P_{a_2} - P_{a_1}$$

donc :

$$MA_2 \cdot \delta_1 + MB_1 \cdot \delta_2 = 0.$$

En un point M de la ligne de courbure (Δ) intersection des quadriques homofocales Σ_1 , Σ_2 , les rayons de courbure MA_2 , MB_1 des sections de Σ_1 et Σ_2 normales en M à la courbe (Δ) sont liés par la relation :

$$MA_2 \cdot \delta_1 + MB_1 \cdot \delta_2 = 0$$

δ_1 et δ_2 étant les distances du centre D aux plans tangents μ_1 et μ_2 au point M de Σ_1 et Σ_2 .

8. Le point A_2 étant le pôle du plan μ_1 par rapport à Σ_2 les plans tangents à cette quadrique, parallèles à μ_1 coupent la normale n_1 à Σ_1 en deux points T_1 et T_2 tels que

$$(A_2MT_1T_2) = -1$$

par suite

$$\frac{2}{MA_2} = \frac{1}{MT_1} + \frac{1}{MT_2} = \frac{2MT}{MT_1 \cdot MT_2}$$

T étant le milieu de T_1T_2 . Ce point est alors dans le plan diamétral parallèle à μ_1 et on a en grandeur et en signe :

$$MT = \delta_1$$

par suite :

$$MA_2 \cdot \delta_1 = MT_1 \cdot MT_2.$$

Les plans tangents à Σ_2 parallèles au plan μ_1 déterminent sur la normale n_1 à la quadrique Σ_1 deux points T_1 et T_2 tels que

$$MA_2 \cdot \delta_1 = MT_1 \cdot MT_2.$$

COROLLAIRE. Le long de la ligne de courbure (Δ) le produit $MT_1 \cdot MT_2$ est constant. Sa valeur est donnée par $P_{a_1} - P_{a_2}$ (7).

9. Les plans tangents à Σ_1 parallèles à μ_2 coupent la normale n_2 à la surface Σ_2 en deux points T'_1 , et T'_2 et on a (8) :

$$MT'_1 \cdot MT'_2 = P_{a_2} - P_{a_1}$$

par conséquent :

Si μ_1 et μ_2 sont les plans tangents en un point M commun à deux quadriques homofocales Σ_1, Σ_2 ; T_1, T_2 les traces de la normale n_1 à Σ_1 sur les plans tangents à Σ_2 parallèles à μ_1 ; T'_1, T'_2 celles de la normale n_2 à Σ_2 sur les plans tangents à Σ_1 parallèles à μ_2 on a l'égalité :

$$MT_1 \cdot MT_2 + MT'_1 \cdot MT'_2 = 0.$$

10. Les plans tangents à Σ_3 parallèles à μ_2 coupent la normale n_2 aux points T_3, T_4 ; les plans tangents à Σ_1 parallèles

à μ_3 coupent la normale n_3 aux points T_5, T_6 . On a (Corollaire n.^o 8):

$$MT_1 \cdot MT_2 = P_{a_1} - P_{a_2}; \quad MT_3 \cdot MT_4 = P_{a_2} - P_{a_3}; \quad MT_5 \cdot MT_6 = P_{a_3} - P_{a_1}$$

donc

$$MT_1 \cdot MT_2 + MT_3 \cdot MT_4 + MT_5 \cdot MT_6 = 0.$$

Ainsi: Si $\mu_1, \mu_2, \mu_3, n_1, n_2, n_3$, sont les plans tangents et les normales correspondantes en un point M commun à trois quadriques homofocales $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$; T_1, T_2 les traces de n_1 sur les plans tangents à Σ_2 parallèles à μ_1 ; T_3, T_4 les traces de n_2 sur les plans tangents à Σ_3 parallèles à μ_2 ; T_5, T_6 les traces de n_3 sur les plans tangents à Σ_1 parallèles à μ_3 , on a l'égalité:

$$MT_1 \cdot MT_2 + MT_3 \cdot MT_4 + MT_5 \cdot MT_6 = 0.$$

11. Dans le cas de trois paraboloides homofocaux $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ on désigne par N'_1, N'_2, N'_3 les traces des normales n_1, n_2, n_3 sur le second plan de symétrie (ac); par F_1 le foyer commun aux sections principales dans le plan de symétrie (ab); on a (6):

$$\frac{MN_1 \cdot MN'_1}{MA_2 \cdot MA_3} = \frac{S_1 F_1 \cdot S_1 F_2}{S_1 S_2 \cdot S_1 S_3}; \quad \frac{MN_2 \cdot MN'_2}{MB_1 \cdot MB_3} = \frac{S_2 F_1 \cdot S_2 F_2}{S_2 S_1 \cdot S_2 S_3};$$

$$\frac{MN_3 \cdot MN'_3}{MC_1 \cdot MC_2} = \frac{S_3 F_1 \cdot S_3 F_2}{S_3 S_1 \cdot S_3 S_2}.$$

Or on a (CHASLES, *Géométrie supérieure*, p. 214)

$$\frac{S_1 F_1 \cdot S_1 F_2}{S_1 S_2 \cdot S_1 S_3} + \frac{S_2 F_1 \cdot S_2 F_2}{S_2 S_1 \cdot S_2 S_3} + \frac{S_3 F_1 \cdot S_3 F_2}{S_3 S_1 \cdot S_3 S_2} = 1$$

par suite: Si les normales n_1, n_2, n_3 au point M commun à trois paraboloides homofocaux $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, coupent respectivement les deux plans de symétrie en des couples de points N_1 et N'_1, N_2 et N'_2, N_3 et N'_3 , on a entre les courbures totales de ces quadriques au point M la relation:

$$\frac{MN_1 \cdot MN'_1}{MA_2 \cdot MA_3} + \frac{MN_2 \cdot MN'_2}{MB_1 \cdot MB_3} + \frac{MN_3 \cdot MN'_3}{MC_1 \cdot MC_2} = 1.$$

12. Dans le cas de quadriques à centre, soient t et t' les longueurs des tangentes menées du point M aux sphères focales

de la quadrique Σ_1 , dont les centres F et F' sont supposés pour fixer les idées sur l'axe a . D'après un théorème dû à VALSON ⁽¹⁾ on a

$$(t + t')^2 = 4P_{a_2}, \quad (t - t')^2 = 4P_{a_3}$$

d'où

$$2P_{a_2} + 2P_{a_3} = t^2 + t'^2 = \overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 - 2R^2$$

R étant le rayon des sphères focales. On a aussi ⁽²⁾

$$\overline{OF}^2 = \frac{(P_{a_1} - P_{b_1})(P_{a_1} - P_{c_1})}{P_{a_1}}; \quad R^2 = \frac{P_{b_1} \cdot P_{c_1}}{P_{a_1}}$$

$$\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 = 2\overline{OM}^2 + 2\overline{OF}^2$$

par suite

$$2P_{a_2} + 2P_{a_3} = 2\overline{OM}^2 + 2P_{a_1} - 2P_{b_1} - 2P_{c_1}$$

ou

$$\overline{OM}^2 = P_{a_2} + P_{a_3} - P_{a_1} + P_{b_1} + P_{c_1} = P_{a_2} + P_{a_3} - P_{a_2} + P_{b_2} + P_{c_1}$$

ainsi:

$$\overline{OM}^2 = P_{c_1} + P_{b_2} + P_{a_3} \quad (3).$$

13. On a (7):

$$MA_2 \cdot \delta_1 = P_{a_1} - P_{a_2}, \quad MA_3 \cdot \delta_1 = P_{a_1} - P_{a_3}$$

par suite

$$(MA_2 + MA_3) \delta_1 = 2P_{a_1} - P_{a_2} - P_{a_3}.$$

En combinant cette égalité avec la relation n° 12 on a

$$(MA_2 + MA_3) \delta_1 + \overline{OM}^2 = 2P_{a_1} - P_{a_2} + P_{b_2} + P_{c_1} = P_{a_1} + P_{b_1} + P_{c_1}.$$

Ainsi: *La puissance du point M relativement à la sphère orthogonale de la quadrique Σ_1 est égale à*

$$-(MA_2 + MA_3) \delta.$$

(1) SCHROETER, *Oberflächen zweiter ordnung*, p. 688. — SERVAIS, *Sur les points focaux dans les surfaces du second degré* (Annaes da Academia Polytechnica do Porto, t. II, 1907, p. 31).

(2) SCHROETER, loc. cit., p. 683, 685.

(3) SALMON, *Traité de géométrie analytique à trois dimensions*, p. 208.

14. Le plan polaire de M par rapport à la sphère orthogone de Σ_1 coupe le diamètre OM et la normale n_1 aux points S et T; soient V la projection O sur le plan μ_1 , R le rayon de la sphère orthogone; on a:

$$OM \cdot OS = R^2$$

$$OM : OV = MT : MS$$

par suite

$$MT \cdot OV = OM \cdot MS = OM \cdot OS - \overline{OM}^2 = R^2 - \overline{OM}^2$$

donc (13)

$$MT \cdot OV = (MA_2 + MA_3) \delta_1, \quad MT = -(MA_2 + MA_3).$$

Le plan polaire d'un point M d'une quadrique par rapport à la sphère orthogone détermine sur la normale n_1 au point M un segment TM égal à la somme des rayons de courbure principaux MA_2, MA_3 de la surface en ce point.

15. On considère le faisceau de quadriques φ circonscrites à Σ_1 le long des génératrices de cette surface situées dans le plan μ_1 . Leurs centres sont situés sur le diamètre OM et elles ont au point M mêmes centres de courbure principaux A_2 et A_3 . Les sphères orthogones des quadriques φ forment un faisceau dont les points limites sont M et S. Le plan radical commun à ces sphères, également distant de M et de S, est le plan orthogone du paraboloïde appartenant au faisceau des quadriques φ . Ce plan est également distant des points M et T; par suite:

Le plan orthogone d'un paraboloïde détermine sur la normale au point M de la surface un segment égal à la demi-somme des rayons de courbure principaux MA_2, MA_3 au point considéré (1).

16. Le second point limite S du faisceau des sphères orthogones est le centre d'un hyperboloïde spécial du faisceau des quadriques φ . Cet hyperboloïde a trois plans asymptotes rectangulaires et le rayon de la sphère orthogone est nul; la propriété (14) montre que:

Si un hyperboloïde a trois plans asymptotes rectangulaires, le plan diamétral normal au diamètre passant par un point M de la

(1) Nous avons établi analytiquement les résultats des numéros 13, 14, 15 dans un travail — *Quelques propriétés des surfaces du second degré* (Bulletins de l'Académie royale de Belgique, 1893).

surface, détermine sur la normale en ce point un segment TM éga à la somme des rayons de courbure principaux MA_2, MA_3 au point considéré. C'est la généralisation d'une propriété bien connue de l'hyperbole équilatère.

17. Les plans μ_1, μ_2, μ_3 appartenant à un espace (E) leurs pôles pris respectivement par rapport à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ font partie des espaces $(E_1), (E_2), (E_3)$ réciproques à (E) et projectifs entre eux. Ces pôles sont:

$$\mu_1) \quad M, \quad A_2, \quad A_3$$

$$\mu_2) \quad B_1, \quad M, \quad B_3$$

$$\mu_3) \quad C_1, \quad C_2, \quad M.$$

Les éléments doubles des espaces $(E_1), (E_2), (E_3)$ sont les sommets du tétraèdre $ABCD$ conjugué à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$: DA, DB, DC sont les axes principaux de ces surfaces.

Dans les espaces projectifs (E_1) et (E_2) , les plans projetant de la droite double AB , les points homologues M et A_2, B_1 et M se correspondent dans deux faisceaux projectifs dont les éléments doubles sont ABC et ABD . On en conclut que les plans projetant de AB les couples A_2 et B_1, C et D appartiennent à une involution dont un élément double est le plan ABM . Cette involution sera représentée par

$$AB(MM, CD, A_2B_1).$$

On a de même les involutions:

$$AB(MM, CD, A_3C_1), \quad AB(MM, CD, B_3C_2)$$

Ces involutions sont identiques; par suite:

D'une arête AB du tétraèdre conjugué à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ on projette les six centres de courbure principaux, groupés par couple dans l'ordre A_2B_1, A_3C_1, B_3C_2 suivant trois couples de plans conjugués dans une involution. Les deux faces du tétraèdre passant par l'arête AB , sont conjuguées dans cette involution et le plan ABM est un élément double.

Le groupement des centres de courbure principaux se reconnaît aisément. Le plan tangent en M à l'une des surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ coupe les deux autres quadriques suivant deux sections principales dont les centres de courbure en M sont deux centres de courbure principaux associés.

18. L'involution de plans $AB(MM, CD, A_2B_1)$ est coupée par

l'axe de symétrie CD suivant l'involution $(M'M', CD, A''_2B''_1)$. Dans le cas où les quadriques $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ ont un centre à distance finie, ce point D est le point central de cette involution et on a :

$$\overline{DM}^2 = DA''_2 \cdot DB''_1.$$

Si ces quadriques sont des paraboloides, D est à l'infini et est un point double de l'involution; par suite :

$$A''_2M' = M'B''_1.$$

Ainsi: *Dans le cas des surfaces à centre si M', A''_2, B''_1 sont les projections orthogonales sur un axe de symétrie, du point M et de deux centres de courbure associés A_2 et B_1 on a*

$$\overline{DM}^2 = DA''_2 \cdot DB''_1$$

D étant le centre des quadriques.

Si les quadriques homofocales $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sont des paraboloides le point M' est le milieu du segment $A''_2B''_1$.

19. Le point B_1 est le pôle du plan μ_2 par rapport à Σ_1 et les plans ABB_1 et μ_2 sont conjugués par rapport à cette surface. Le plan ABB_1 coupe la normale n_1 en un point M_2 et on a l'involution (17)

$$(MM, N_1\infty, A_2M_2)$$

Ainsi: *La normale n_1 en un point M d'une quadrique Σ_1 coupe un plan de symétrie α de cette surface en un point N_1 ; les plans parallèles à α et conjugués respectivement aux plans μ_2, μ_3 des sections principales au point M, rencontrent la normale aux points M_2, M_3 ; on a l'involution:*

$$(MM, N_1\infty, A_2M_2, A_3M_3)$$

et la relation :

$$\overline{N_1M}^2 = N_1A_2 \cdot N_1M_2 = N_1A_3 \cdot N_1M_3.$$

20. Si la quadrique Σ_1 est un paraboloïde on peut prendre les plans normaux à l'axe de symétrie et conjugués à μ_2, μ_3 ; le plan α est alors à l'infini, le point N_1 devient un point double de l'involution (19) et on a

$$A_2M = MM_2 \quad A_3M = MM_3.$$

Ainsi: *Dans un paraboloïde les plans normaux à l'axe de symétrie*

et conjugués respectivement aux plans des sections principales μ_2, μ_3 au point M de la surface rencontrent la normale en ce point, aux points M_2, M_3 tels que

$$MM_2 = A_2M, \quad MM_3 = A_3M,$$

A_2, A_3 étant les centres de courbure principaux du parabolöide au point M .

21. Si M'' est le point diamétralement opposé à M sur la quadrique Σ_1 , le plan ABM'' est le second plan double de l'involution

$$AB(MM, CD, A_2B_1, A_3C_1, B_3C_2).$$

Par conséquent :

Les centres de courbure principaux associés A_2 et B_1, A_3 et C_1, B_3 et C_2 des quadriques homofocales $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, sont conjugués harmoniques relativement à tout couple de plans menés par les points diamétralement opposés M et M'' parallèlement à un plan de symétrie de Σ_1 .

Cette propriété subsiste pour les parabolöides homofocaux mais le point M'' est alors le symétrique de M par rapport à l'axe de symétrie.

22. Les arêtes du tétraèdre conjugué à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ font partie du complexe des droites l d'où l'on projette les couples de points MM, A_2B_1, A_3C_1 suivant une involution de plans :

$$l(MM, A_2B_1, A_3C_1).$$

La section de cette involution, par la normale n_1 , est l'involution de points

$$(MM, A_2B'_1, A_3C'_1)$$

cette dernière montre que la projectivité définie par les trois couples de points :

$$MM, A_2A_3, C'_1B'_1$$

a un élément double unique M . On a aussi :

$$(MA_2C'_1B'_1) = (MB'_1A_3A_2)$$

ou

$$\frac{\frac{1}{MA_2}}{\frac{1}{MA_2}} - \frac{\frac{1}{MB'_1}}{\frac{1}{MC'_1}} = \frac{\frac{1}{MB'_1}}{\frac{1}{MB'_1}} - \frac{\frac{1}{MA_2}}{\frac{1}{MA_3}}$$

par suite :

$$\frac{1}{MC'_1} - \frac{1}{MB'_1} = \frac{1}{MA_2} - \frac{1}{MA_3}.$$

Cette égalité peut servir à définir le complexe des droites l .
Ainsi :

Les plans projetant d'une arête du tétraèdre ABCD conjugué aux quadriques homofocales $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, les deux centres de courbure principaux d'indice 1, B_1 et C_1 , déterminent sur la normale n_1 de même indice deux points B'_1 et C'_1 tels que

$$\frac{1}{MC'_1} - \frac{1}{MB'_1} = \frac{1}{MA_2} - \frac{1}{MA_3}$$

A_2 et A_3 étant les centres de courbure principaux situés sur la normale n_1 .

23. Le complexe (l) est composé d'une infinité de congruences linéaires dont les axes sont deux rayons homologues quelconques des faisceaux projectifs (C_1) et (B_1) projetant des points C_1 et B_1 les ponctuelles projectives à élément double unique :

$$(M, A_2, C'_1, \dots) \overline{\wedge} (M, A_3, B'_1, \dots).$$

Toute droite du complexe passant par un point donné R est l'intersection de deux plans homologues des faisceaux projectifs

$$RC_1(M, A_2, C'_1, \dots) \overline{\wedge} RB_1(M, A_3, B'_1, \dots).$$

Le cône (R) du complexe est donc du second degré; il a pour génératrices les droites RC_1, RB_1, RM ; le plan Rn_1 est tangent à ce cône le long de la génératrice RM ; car M est un élément double unique des ponctuelles ($MM, A_2A_3, C'_1B'_1, \dots$), déterminées sur la droite n_1 par les faisceaux qui engendrent le cône.

COROLLAIRE. Les gerbes de rayons ayant pour centres les points M, C_1, B_1 , appartiennent au complexe (l).

24. Le cône du complexe ayant pour sommet le centre D des quadriques $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ passe par les axes de symétrie DA, DB, DC (22). On en conclut (23):

Le cône du second ordre ayant pour génératrices les axes de symétrie DA, DB, DC de la quadrique Σ_1 et le diamètre DM, et qui est tangent en M à la normale n_1 en ce point à Σ_1 , passe par les centres de courbure principaux B_1, C_1 des quadriques Σ_1, Σ_2 homofocales à Σ_1 .

25. Toute droite du complexe (l) située dans un plan σ joint deux points homologues des ponctuelles projectives, sections par le plan σ des faisceaux projectifs :

$$C_1 (M, A_2, C'_1, \dots) \quad \overline{\wedge} \quad B_1 (M, A_3, B'_1, \dots).$$

La courbe du complexe est donc du second degré ; elle a pour tangentes les droites $\sigma\mu_1, \sigma\mu_2, \sigma\mu_3$.

COROLLAIRE. Les systèmes plans réglés ayant pour supports les plans μ_1, μ_2, μ_3 appartiennent au complexe (l).

26. Si X est la trace de B_1C_1 sur le plan σ , les faisceaux qui projettent de ce point les ponctuelles projectives qui engendrent la courbe du complexe (25), sont les sections par le plan σ des faisceaux

$$B_1C_1 (M, A_2, C'_1, \dots) \quad \overline{\wedge} \quad B_1C_1 (M, A_3, B'_1, \dots)$$

ces deux faisceaux projectifs ayant un élément double unique B_1C_1M ou μ_1 les deux faisceaux de centre X ont aussi un élément double unique $\sigma\mu_1$. Ainsi X est le point de contact de la tangente $\sigma\mu_1$ à la conique du complexe du plan σ . Donc :

Toute conique du complexe (l) s'appuie sur la droite B_1C_1 .

27. La conique (α) du complexe (l) située dans une face $\alpha \equiv BCD$ du tétraèdre conjugué à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ est inscrite au triangle BCD (22) et au triangle $N_1N_2N_3$ formé par les traces des normales n_1, n_2, n_3 sur le plan α (Corollaire 25). Cette conique (α) déterminée par les deux triangles $BCD, N_1N_2N_3$ qui lui sont circonscrits, ne dépend pas du choix des centres de courbure principaux de même indice B_1, C_1 qui ont joué un rôle spécial dans les développements précédents. Elle appartient aussi aux complexes (l') et (l'') des droites l' ou l'' d'où l'on projette les couples (MM, A_2B_1, B_3C_2) ou les couples (MM, A_3C_1, B_3C_2) suivant une involution. Dans le premier complexe (l') les points A_2, C_2 remplacent les points B_1, C_1 , et les points B_1, B_3 remplacent A_2, A_3 ; dans le second complexe (l''), les points A_3, B_3 remplacent B_1, C_1 et les points C_1, C_2 remplacent A_2, A_3 . On conclut de là :

D'une tangente à la conique (α) inscrite aux deux triangles $BCD, N_1N_2N_3$, on projette les centres de courbure principaux associés A_2B_1, A_3C_1, B_3C_2 suivant une involution dont un plan double passe par le point M .

28. Les traces X_1, X_2, X_3 des droites B_1C_1, A_2C_2, A_3B_3 sur

le plan α sont les points de contact des côtés N_2N_3 , N_1N_3 , N_1N_2 du triangle $N_1N_2N_3$ avec la conique (α) (26). Par suite:

Les droites joignant les centres de courbure principaux de même indice B_1C_1 , A_2C_2 , A_3B_3 et les normales n_1 , n_2 , n_3 déterminent dans une face du tétraèdre conjugué à Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 deux triangles homologiques.

29. Les tangentes à la conique (α) déterminent sur N_1N_3 et N_1N_2 des ponctuelles projectives, respectivement perspectives aux faisceaux

$$C_1 (M, A_2, C'_1 \dots) \quad \text{et} \quad B_1 (M, A_3, B'_1, \dots).$$

Le point X_3 étant le point de contact de N_1N_2 avec la conique (α) les points N_1 et X_3 sont homologues dans les ponctuelles et les rayons C_1N_1 , B_1X_3 sont homologues dans les faisceaux (C_1) et (B_1), par suite ils coupent la normale n_1 en deux points N_1 et X'_3 correspondants dans la projectivité (MM, A_2A_3 , $C'_1B'_1$) et l'on a :

$$\frac{1}{MN_1} - \frac{1}{MX'_3} = \frac{1}{MA_2} - \frac{1}{MA_3}.$$

La droite joignant le centre de courbure B_1 à la trace de la droite A_3B_3 sur le plan de symétrie α coupe la normale n_1 en un point X'_3 tel que

$$\frac{1}{MN_1} - \frac{1}{MX'_3} = \frac{1}{MA_2} - \frac{1}{MA_3}$$

N_1 étant la trace de n_1 sur le plan α .

30. La droite C_1X_2 coupe n_1 en un point X'_2 et on a

$$\frac{1}{MX'_2} - \frac{1}{MN_1} = \frac{1}{MA_2} - \frac{1}{MA_3}.$$

Les deux dernières égalités donnent :

$$\frac{2}{MN_1} = \frac{1}{MX'_2} + \frac{1}{MX'_3}.$$

Les droites joignant les points B_1 et C_1 respectivement aux traces des droites A_3B_3 , A_2C_2 sur le plan de symétrie α coupent la normale n_1 en deux points séparés harmoniquement par le point M et le plan α .

Si le plan α est à l'infini on voit que: *Les parallèles menées par les centres de courbure principaux B_1, C_1 respectivement aux droites A_3B_3, A_2C_2 coupent la normale n_1 en deux points équidistants du point M.*

31. Les faces du tétraèdre ABCD conjugué à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ et les plans μ_1, μ_2, μ_3 tangents en M à ces surfaces sont osculateurs à une même cubique gauche; car chaque face α du tétraèdre est coupée par les autres faces et les plans μ_1, μ_2, μ_3 suivant des tangentes à la conique (α). Tout plan σ osculateur à cette parabole gauche coupe la développable osculatrice suivant une conique (σ) appartenant aux complexes (l), (l'), (l'') car les coniques de ces complexes situées dans le plan σ ont en commun comme tangentes, les traces de σ sur les faces du tétraèdre ABCD et sur les plans μ_1, μ_2, μ_3 . Ces coniques sont donc identiques. Par suite:

Les faces du tétraèdre ABCD conjugué aux trois quadriques homofocales $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ et les plans tangents μ_1, μ_2, μ_3 à ces surfaces au point M, sont osculateurs à une parabole gauche. D'un axe de cette courbe, on projette les centres de courbure principaux associés A_2 et B_1, A_3 et C_1, B_3 et C_2 suivant trois couples de plans conjugués dans une involution; un plan double de cette involution passe par le point M.

COROLLAIRE. *Les plans menés par un axe de la parabole gauche et deux centres de courbure principaux de même indice B_1, C_1 déterminent sur la normale n_1 deux points B'_1, C'_1 tels que*

$$\frac{1}{MC'_1} - \frac{1}{MB'_1} = \frac{1}{MA_2} - \frac{1}{MA_3}.$$

32. Toute conique commune aux complexes (l), (l'), (l'') s'appuie sur les droites B_1C_1, A_2C_2, A_3B_3 (26). Ces droites sont donc des génératrices de la développable osculatrice à la parabole gauche, dont ces coniques sont des sections (31). Par conséquent:

Les droites B_1C_1, A_2C_2, A_3B_3 joignant les centres de courbure principaux de même indice, sont des tangentes à la parabole gauche déterminée ci-dessus.

33. Les ternes de droites n_1, n_2, n_3 et B_1C_1, A_2C_2, A_3B_3 déterminent dans une face α du tétraèdre conjugué à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ deux triangles $N_1N_2N_3, X_1X_2X_3$ homologues (28). Le centre d'homologie de ces deux triangles est à l'intersection des éléments doubles de la projectivité cyclique déterminée par le

terne de tangentes N_2N_3 , N_3N_1 , N_1N_2 de la conique (α) inscrite dans la développable osculatrice à la parabole gauche. Ce point est donc sur l'axe $E\varphi$ de cette parabole, intersection des éléments doubles E et φ de la projectivité cyclique déterminée sur elle par les plans osculateurs μ_1 , μ_2 , μ_3 . Cette droite $E\varphi$ est indépendante de la face α choisie. Donc :

Les normales n_1 , n_2 , n_3 au point M commun aux trois quadriques homofocales Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 et les droites B_1C_1 , A_2C_2 , A_3B_3 joignant les centres de courbure principaux de même indice, déterminent dans chaque face du tétraèdre conjugué à Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 , deux triangles homologiques. Les centres d'homologie relatifs aux quatre faces du tétraèdre sont en ligne droite.

On démontre aisément que : *Les axes d'homologie relatifs aux quatre faces du tétraèdre sont partie d'un même système réglé.*

En effet l'axe d'homologie s des deux triangles $N_1N_2N_3$, $X_1X_2X_3$ est la polaire du centre d'homologie S relativement à la conique (α) . On sait que la polaire s d'un point S d'un axe $E\varphi$ d'une cubique gauche par rapport à la conique (α) , inscrite dans la développable osculatrice et située dans le troisième plan osculateur α issu de S , décrit un système réglé quand le point S se déplace sur l'axe $E\varphi$.

La ponctuelle décrite par le point S étant projective au système réglé décrit par la polaire s , on voit que :

Le rapport anharmonique des quatre centres d'homologie S est égal à celui des quatre axes d'homologie s .

34. Les plans osculateurs μ_1 , μ_2 , μ_3 de la parabole gauche passant par le point M , le plan mené par ce point et l'axe $E\varphi$ est le plan focal de M . Il coupe les tangentes B_1C_1 , A_2C_2 , A_3B_3 en leurs points de contact T_1 , T_2 , T_3 et l'axe $E\varphi$ est la polaire trilinéaire de M relativement au triangle $T_1T_2T_3$. Par suite :

Le plan mené par le point M et la droite des centres d'homologie S , coupe les droites joignant les centres de courbure principaux de même indice B_1C_1 , A_2C_2 , A_3B_3 suivant un triangle $T_1T_2T_3$. La droite des centres d'homologie est la polaire trilinéaire du point M relativement à ce triangle.

SUR LES POLYNOMES $U_{m,n}$ D'HERMITE ET LES POLYNOMES X_n DE LEGENDRE

POR

PAUL APPELL

Membre de l'Institut de France

1. Dans un précédent article des *Annales* ⁽¹⁾ nous avons montré comment les polynômes $U_{m,n}$ d'HERMITE se rattachent aux polynômes X_n de LEGENDRE.

Voici un autre point de vue sous lequel les deux sortes de polynômes sont liés entre eux. Le polynôme $U_{m,n}$, d'HERMITE est, à un facteur numérique près, égal à la dérivée

$$\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m dy^n};$$

l'intégrale

$$\iint U_{m,n} P \, dx \, dy$$

étendue au cercle $x^2+y^2-1 \leq 0$ est nulle toutes les fois que P est un polynôme en x et y de degré inférieur à $m+n$. En particulier on a

$$\iint U_{m,n} (x^2+y^2)^k \, dx \, dy = 0$$

si

$$2k < m+n.$$

Exprimons cette propriété en coordonnées polaires

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta;$$

⁽¹⁾ Dans la formule (1) de cet article on a écrit $1-2ax+x^2$ au lieu de $1-2ax+a^2$.

nous aurons

$$\int_0^1 \Upsilon^{2k+1} d\Upsilon \int_0^{2\pi} \mathbf{U}_{m,n} d\theta = 0$$

tant que

$$2k < m + n.$$

Si l'un des entiers m ou n est impair, ou si tous les deux sont impairs, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{U}_{m,n} d\theta$$

est *nulle*; en effet, dans ces cas, $\mathbf{U}_{m,n}$ est une fonction paire de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$, multipliée par $\cos \theta$, ou par $\sin \theta$, ou par $\cos \theta \sin \theta$.

Si m et n sont pairs tous deux

$$m = 2p, \quad n = 2q$$

l'intégrale

$$\mathbf{Q}_{p,q}(\Upsilon^2) = \int_0^{2\pi} \mathbf{U}_{2p,2q} d\theta$$

est un polynôme en Υ^2 de degré $p + q$, et on a

$$\int_0^1 \mathbf{Q}_{p,q}(\Upsilon^2) \Upsilon^{2k+1} d\Upsilon = 0$$

tant que l'entier positif k est inférieur à $p + q$. Si on fait

$$\Upsilon^2 = t,$$

on a

$$\int_0^1 \mathbf{Q}_{p,q}(t) t^k dt = 0$$

pour

$$k = 0, 1, 2, \dots, p + q - 1.$$

Donc $\mathbf{Q}_{p,q}(t)$ est, à un facteur constant près, identique au polynôme

$$\mathbf{R}_{p,q}(t) = \frac{d^{p+q}}{dt^{p+q}} [t^{p+q} (1 - t^{p+q})]$$

qui est, après un changement de variable évident

$$t = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}, \quad 1-t = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$$

un polynôme X_n , à un facteur constant près.

En résumé tous les polynômes

$$Q_{p,q}(t)$$

d'un même degré $s, p+q=s$, sont égaux, à des facteurs numériques près, à un même polynôme

$$(1) \quad R_s(t) = \frac{d^s}{dt^s} t^s (1-t)^s,$$

immédiatement réductible aux polynômes de LEGENDRE.

2. On peut vérifier ce résultat et déterminer les facteurs de proportionnalité par la méthode suivante, en partant de la fonction génératrice.

On a, d'après le précédent article

$$\frac{1}{1 - Y \rho \cos(\theta - \alpha)^2 + \rho^2(1 - Y^2)} = \sum_N \rho^N H_N,$$

avec

$$H_N = \sum_{m+n=N} \cos^m \alpha \sin^n \alpha U_{m,n}.$$

Multiplions les deux membres de ce développement par $d\theta$ et intégrons de 0 à 2π par rapport à θ . Nous aurons

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - Y \rho \cos(\theta - \alpha)^2 + \rho^2(1 - Y^2)}} = \sum_N \rho^N \int_0^{2\pi} H_N d\theta.$$

Mais il est évident que l'intégrale du premier membre est indépendante de α , car, la fonction intégrée admettant la période 2π , l'intégrale a la même valeur dans un intervalle quelconque égal à une période, par exemple de α à $\alpha + 2\pi$. Donc les intégrales

$$I_N = \int_0^{2\pi} H_N d\theta = \sum_{m+n=N} \cos^m \alpha \sin^n \alpha \int_0^{2\pi} U_{m,n} d\theta$$

sont indépendantes de α . Des lors, si m , ou n , ou m et n sont

impairs, ces sommes I_N sont identiquement nulles, quel que soit α .

Si m et n sont pairs

$$m = 2p, \quad n = 2q, \quad N = 2(p + q),$$

l'intégrale I_N ne peut être indépendante de α que si elle est identique à

$$(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^{p+q} \int_0^{2\pi} U_{N,0} d\theta.$$

En faisant cette identification et employant les notations précédentes, on a

$$Q_{p,q}(\Gamma^2) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+q)}{1 \cdot 2 \dots p \cdot 1 \cdot 2 \dots q} Q_{p+q,0}(\Gamma^2).$$

Tous les polynômes $Q_{p,q}(\Gamma^2)$, d'un même degré s , $p+q=s$, sont donc égaux à l'un d'eux $Q_{p+q,0}(\Gamma^2)$, multiplié par des facteurs constants.

3. Il reste à trouver l'expression complète du polynôme

$$Q_{p+q,0}(t)$$

obtenu en remplaçant Γ^2 par t . Nous avons vu, dans le premier paragraphe, que ce polynôme est, à un facteur constant près égal au polynôme $R_s(t)$ donné par (1). Nous écrirons

$$(3) \quad Q_{s,0}(t) = h_s \frac{d^s}{dt^s} [t^s (1-t)^s]$$

où il reste à déterminer la constante h_s .

Dans le développement (2) faisons $\alpha = 0$; il vient

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\Gamma \rho \cos \theta)^2 + \rho^2(1-\Gamma^2)}} = \Sigma \rho^N \int_0^{2\pi} U_{N,0} d\theta,$$

où

$$N = 2s, \quad \int_0^{2\pi} U_{N,0} d\theta = Q_{s,0}(\Gamma^2).$$

Ce développement devient donc, d'après (3),

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\Gamma \rho \cos \theta)^2 + \rho^2(1-\Gamma^2)}} = \Sigma \rho^{2s} h_s R_s(\Gamma^2),$$

d'où, en faisant $\gamma = 0$,

$$(5) \quad \frac{2\pi}{\sqrt{1+\rho^2}} = \sum \rho^{2s} k_s R_s(0).$$

Mais, d'après (1),

$$R_s(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s;$$

d'autre part

$$(6) \quad \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} = \sum (-1)^s \rho^{2s} \frac{1 \cdot 3 \dots 2s-1}{2 \cdot 4 \dots 2s}.$$

Identifiant (5) et (6) on a

$$k_s = 2\pi \frac{(-1)^s}{2^s} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2s-1}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s)^2}.$$

D'où enfin la formule définitive

$$(7) \quad Q_{s,0}(t) = 2\pi \frac{(-1)^s}{2^s} \frac{1 \cdot 3 \dots 2s-1}{(1 \cdot 2 \dots s)^2} \frac{d^s}{dt^s} [t^s (1-t)^s]$$

donnant les coefficients du développement de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{[1-\gamma \rho \cos(\theta-\alpha)]^2 + \rho^2(1-\gamma^2)}} = \sum_0^\infty \rho^{2s} Q_{s,0}(\gamma^2)$$

suivant les puissances positives et croissantes de ρ^2 .

On aura une vérification des coefficients numériques en faisant $\gamma = 1$.

4. On peut également présenter cette formule comme une propriété des polynômes X_N de LEGENDRE. Nous avons vu en effet, dans le précédent article, que

$$H_N = [1 - \gamma^2 \sin^2(\theta - \alpha)]^{\frac{N}{2}} X_N \left(\frac{\gamma \cos(\theta - \alpha)}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2(\theta - \alpha)}} \right).$$

Faisant $N = 2s$, $\gamma^2 = t$. Nous aurons, d'après (7),

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} [1 - t \sin^2(\theta - \alpha)]^{-s} X_{2s} \left[\frac{\sqrt{t} \cos(\theta - \alpha)}{\sqrt{1 - t \sin^2(\theta - \alpha)}} \right] d\theta \\ &= 2\pi \frac{(-1)^s}{2^s} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots 2s-1}{(1 \cdot 2 \dots s)^2} \frac{d^s}{dt^s} [t^s (1-t)^s]. \end{aligned}$$

SUR LES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES

PAR

D. POMPEIU

Professeur à l'Université de Jassy (Roumanie)

L'intégrale de CAUCHY

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

représente, dans l'intérieur du contour fermé C , la fonction holomorphe $f(z)$ qui prend sur C les valeurs $f(\zeta)$.

Si le point z est extérieur au contour C , on sait que l'intégrale est identiquement nulle.

Une intégrale plus générale que celle de CAUCHY peut être définie de la façon suivante:

Sur un contour fermé C , donnons-nous une succession *continue* de valeurs complexes $\lambda(\zeta)$ et formons l'intégrale

$$J = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\lambda(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

z étant un paramètre qu'on peut prendre, à volonté, dans l'intérieur ou à l'extérieur du contour C .

On démontre que l'intégrale J définit en dedans et en dehors du contour C deux fonctions holomorphes prenant sur C deux suites continues de valeurs, la différence de ces valeurs étant justement $\lambda(\zeta)$.

Ce théorème se trouve cité, en note, dans les *Leçons sur les fonctions méromorphes* (page 3) de M. BOREL.

Il généralise le théorème de l'intégrale de CAUCHY.

En effet, si l'on prend $\lambda(\zeta) = f(\zeta)$ c'est-à-dire les valeurs mêmes de $f(z)$ sur le contour, on trouve comme fonction *intérieure* $f(z)$ et comme fonction *extérieure* zéro, et sur le contour C la différence est justement $f(\zeta)$.

1. Considérons l'intégrale J et prenons comme fonction $\lambda(\zeta)$, sur C , une fonction définie de la façon suivante :

Soit $\varphi(z)$ une fonction holomorphe dans C et sur le contour C , c'est-à-dire holomorphe dans un domaine auquel C est complètement intérieur.

Posons

$$\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Je prends, sur C ,

$$\lambda(\zeta) = u(\xi, \eta) - iv(\xi, \eta)$$

c'est-à-dire en chaque point de C la valeur conjuguée de celle de φ au même point.

La fonction $\lambda(\zeta)$ étant ainsi définie je forme l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\lambda(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

et je désigne par $\omega(z)$ la fonction *intérieure* et par $\phi(z)$ la fonction *extérieure*, définies par cette intégrale.

Je me propose de démontrer que ni $\omega(z)$ ni $\phi(z)$ n'admettent le contour C comme une *frontière naturelle* si ce contour est une ligne analytique, partout régulière. C'est-à-dire que chacune de ces fonctions peut être *prolongée* au delà du contour C : la fonction $\omega(z)$ au dehors; la fonction $\phi(z)$ en dedans du contour C .

2. On a

$$\omega(\zeta) - \phi(\zeta) = \lambda(\zeta),$$

sur le contour C . Ou

$$\omega(\zeta) = \phi(\zeta) + \lambda(\zeta).$$

D'après cela si l'on peut trouver, en dehors du contour C , une fonction, holomorphe dans le voisinage de C , prenant sur C les valeurs $\lambda(\zeta)$, le prolongement de $\omega(z)$ est assuré.

Cette fonction inconnue on peut la noter $\lambda(z)$ puisqu'elle doit prendre sur C les valeurs $\lambda(\zeta)$.

Je dis qu'elle existe et, pour prouver son existence, je vais démontrer le théorème suivant :

Soit $\varphi(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D. Traçons dans ce domaine une ligne analytique L, partout régulière, et, sur cette ligne, considérons la fonction $\lambda(\zeta)$ dont la valeur en chaque point ζ de la ligne L est égale à la valeur conjuguée de φ au même point ζ .

Je dis qu'il existe une fonction analytique, régulière en chaque point de L, et prenant sur cette ligne les valeurs $\lambda(\zeta)$.

En effet soit

$$\varphi(\zeta) = \sum \alpha_m (\zeta - \zeta_0)^m$$

un *élément* de la fonction φ , dont le *centre* ζ_0 est un point de la ligne L.

On a

$$(1) \quad u(\zeta, \eta) + iv(\zeta, \eta) = \sum \alpha_m (\zeta - \zeta_0)^m.$$

Et, il faut démontrer qu'il existe une série de puissances

$$\sum \beta_m (\zeta - \zeta_0)^m$$

donnant, dans le voisinage de ζ_0 , les valeurs de $\lambda(\zeta)$ pour tout point ζ , pris sur L, et assez voisin de ζ_0 . On doit donc avoir

$$(2) \quad u(\zeta, \eta) - iv(\zeta, \eta) = \sum \beta_m (\zeta - \zeta_0)^m.$$

Mais, en comparant les formules (1) et (2), on en conclut :

$$(3) \quad u(\zeta, \eta) = \sum \frac{1}{2} (\alpha_m + \beta_m) \cdot (\zeta - \zeta_0)^m.$$

Dans cette égalité le premier membre désigne les valeurs de la fonction harmonique u sur la ligne L.

On trouve, de même,

$$(4) \quad v(\zeta, \eta) = \sum \frac{1}{2i} (\alpha_m - \beta_m) \cdot (\zeta - \zeta_0)^m$$

ce qui prouve que, si les développements tels que (3) et (4) sont possibles, il existera aussi le développement cherché (2).

3. Nous sommes donc amenés à démontrer le théorème suivant :

Soit $u(x, y)$ une fonction de deux variables réelles, harmonique dans un domaine D. Traçons dans D une ligne analy-

tique L , régulière en chacun de ses points. Je dis que sur cette ligne la fonction harmonique $u(x, y)$ peut être représentée, dans le voisinage du point $z_0 = \xi_0 + i\eta_0$, par une série de la forme

$$\sum A_m (z - z_0)^m$$

dans laquelle toutes les lettres, sauf m , désignent des nombres complexes.

En d'autres termes: *il existe une fonction analytique $f(z)$, régulière en tout point de la ligne L , et prenant sur L les valeurs $u(\xi, \eta)$.*

On a dans le voisinage du point (ξ_0, η_0)

$$u(x, y) = \varphi_0 + \varphi_1 (x - \xi_0, y - \eta_0) + \dots + \varphi_m (x - \xi_0, y - \eta_0) + \dots$$

Ou, en restant sur la ligne L ,

$$(3') \quad u(\xi, \eta) = \varphi_0 + \varphi_1 (\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) + \dots + \varphi_m (\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) + \dots$$

Mais, la ligne L étant analytique,

$$(5) \quad \begin{aligned} \xi - \xi_0 &= h(t - t_0) + h'(t - t_0)^2 + \dots \\ \eta - \eta_0 &= k(t - t_0) + k'(t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

ou

$$(6) \quad z - z_0 = (h + ik)(t - t_0) + (h' + ik')(t - t_0)^2 + \dots$$

Maintenant, dans le développement (3'), si l'on remplace $(\xi - \xi_0)$ et $(\eta - \eta_0)$ par leurs valeurs (5), on arrive au développement

$$(7) \quad u(\xi, \eta) = \sum K_m (t - t_0)^m,$$

valable dans le voisinage du point (ξ_0, η_0) .

Mais on tire de la formule (6)

$$t - t_0 = \sum X_m (z - z_0)^m,$$

puisque, d'après l'hypothèse, la ligne L est partout régulière; et, mettant à la place de $(t - t_0)$, dans (7), sa valeur en $(z - z_0)$, on arrive à un développement de la forme

$$u(\xi, \eta) = \sum A_m (z - z_0)^m,$$

ce qu'il fallait démontrer

4. Prenons, comme exemple, la fonction

$$u(x, y) = x,$$

qui est évidemment harmonique, et comme ligne analytique, partout régulière, un cercle C de centre

$$c = a + ib$$

et de rayon r .

Je dis qu'il existe une fonction analytique, régulière en chaque point du cercle C et prenant sur ce cercle les valeurs $w = \xi$.

On a

$$\xi = a + r \cos t$$

$$\eta = b + r \sin t$$

d'où

$$\zeta = c + r e^{it}.$$

Mais

$$\xi = a + r \cos t = a + r \cdot \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

et

$$e^{it} = \frac{\zeta - c}{r},$$

donc

$$\xi = a + \frac{1}{2} \left(\zeta - c + \frac{r^2}{\zeta - c} \right) = \frac{1}{2} \left[\zeta + \frac{r^2}{\zeta - c} + (a - ib) \right].$$

La fonction analytique cherchée est donc

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + c' + \frac{r^2}{z - c} \right),$$

en désignant par c' le nombre complexe conjugué de c . Elle prend bien les valeurs w sur le cercle C .

5. Le théorème du n° 3 étant démontré, on peut démontrer maintenant le théorème du n° 2. On a, en effet,

$$u(\xi, \eta) = \sum A_m (\zeta - \zeta_0)^m,$$

$$v(\xi, \eta) = \sum B_m (\zeta - \zeta_0)^m,$$

sur la ligne L . On en déduit

$$u(\xi, \eta) - iv(\xi, \eta) = \sum (A_m - iB_m) (\zeta - \zeta_0)^m.$$

Donc, en se rapportant à la formule (2),

$$\beta_m = A_m - i B_m$$

et le théorème est démontré.

6. Mais ce résultat nous montre que nous aurions pu prendre, sur le contour C, comme fonction $k(\zeta)$ une suite de valeurs

$$u(\zeta, \eta) + iv(\zeta, \eta)$$

les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ étant harmoniques dans une bande comprenant le contour C, sans rien supposer sur l'analyticité de la combinaison

$$u + iv.$$

Nous aurions pu donc prendre deux fonctions harmoniques quelconques u et v avec lesquelles nous aurions défini $k(\zeta)$ par l'égalité

$$k(\zeta) = u(\zeta, \eta) + iv(\zeta, \eta),$$

7. En résumé, nous avons démontré, avec les hypothèses précisées au cours de la démonstration que les deux fonctions $\omega(z)$ et $\phi(z)$ définies par l'intégrale

$$J = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

peuvent être prolongées au del  du contour C: la fonction $\omega(z)$ au dehors; la fonction $\phi(z)$ en dedans du contour C.

SOBRE O METHODO DE GAUSS PARA O CALCULO APPROXIMADO DOS INTEGRAES DEFINIDOS

POR

F. GOMES TEIXEIRA

O methodo para o calculo do valor approximado dos integraes definidos dado por Gauss na memoria intitulada *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* foi completado por MANSION no seu *Résumé du Cours d'Analyse* (1887, p. 132), onde deu uma expressão para o calculo do limite do erro que se commette quando se applica este methodo. É d'esta questão que vamos occupar-nos, para dar uma nova demonstração do resultado obtido por este ultimo geometra.

Recordemos primeiramente os lemmas seguintes:

1.º A equação do gráo n

$$(1) \quad \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} = 0$$

tem n raizes reaes e desiguaes, comprehendidas entre -1 e $+1$.

Pode-se vêr a demonstração d'esta proposição no nosso *Curso de Analyse Infinitesimal* (*Calculo differencial*, 4.ª ed., 1906, p. 281).

2.º Se uma funcção $f(z)$ e as suas derivadas $f'(z), f''(z), \dots, f^{(k)}(z)$ são finitas no intervallo comprehendido entre dois numeros a e b , se os numeros x_1, x_2, \dots, x_k, x pertencem a este intervallo, e se são conhecidos os valores y_1, y_2, \dots, y_k , que toma $f(x)$ nos pontos x_1, x_2, \dots, x_k , podemos formar um poly-

nomio

$$F_k(x) = A + B(x - x_1) + C(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ + M(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})$$

tal que seja

$$f(x) = F_k(x) + R_k, \\ R_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(X)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k),$$

X designando um numero comprehendido entre o maior e o menor dos numeros x_1, x_2, \dots, x_k, x .

Póde vêr-se uma demonstração d'esta proposição na nossa obra atrás mencionada (p. 288-291).

Posto isto, seja

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx$$

o integral dado. Temos

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \int_{-1}^{+1} F_k(x) dx + \int_{-1}^{+1} R_k dx.$$

Supponhamos, porém, que se tomam para valores de x_1, x_2, \dots, x_k as n raizes x_1, x_2, \dots, x da equação (1) e outros n valores $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ arbitrariamente escolhidos entre -1 e $+1$. Temos

$$R_{2n} = \frac{1}{(2n)!} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{2n}) f^{(2n)}(X).$$

Como porém

$$\varphi^{(n)}(x) = (n+1)(n+2) \dots 2n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

podemos, visto que x_1, x_2, \dots, x_n são raizes da equação (1), dar á expressão de R_{2n} a fórma

$$R_{2n} = \frac{(x - x_{n+1})(x - x_{n+2}) \dots (x - x_{2n})}{(2n)!(n+1)(n+2) \dots 2n} \varphi^{(n)}(x) f^{(2n)}(X).$$

Logo o erro R'_{2n} que se comette, quando se calcula o valor

do integral considerado por meio da fórmula

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \int_{-1}^{+1} F_{2n}(x) dx,$$

tem para expressão

$$R'_{2n} = \frac{1}{(2n)!(n+1)(n+2)\dots 2n} \int_{-1}^{+1} \varphi^{(n)}(x) (x-x_{n+1}) \dots (x-x_{2n}) f^{(2n)}(X) dx.$$

Como porém os numeros $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ podem ser tão proximos quanto se queira de x_1, x_2, \dots, x_n , respectivamente, podemos ainda escrever

$$R'_{2n} = \frac{1}{(2n)!(n+1)(n+2)\dots 2n} \int_{-1}^{+1} [\varphi^{(n)}(x)]^2 f^{(2n)}(X) dx,$$

ou, applicando o primeiro theorema do valor médio dos integraes definidos,

$$R'_{2n} = \frac{1}{(2n)!(n+1)(n+2)\dots 2n} f^{(2n)}(X') \int_{-1}^{+1} [\varphi^{(n)}(x)]^2 dx,$$

X' designando um numero comprehendido entre -1 e $+1$.

Mas, integrando por partes, temos

$$\int [\varphi^{(n)}(x)]^2 dx = \varphi^{(n-1)}(x) \varphi^{(n)}(x) - \int \varphi^{(n-1)}(x) \varphi^{(n+1)}(x) dx,$$

e portanto

$$\int_{-1}^{+1} [\varphi^{(n)}(x)]^2 dx = - \int_{-1}^{+1} \varphi^{(n-1)}(x) \varphi^{(n+1)}(x) dx.$$

Do mesmo modo

$$\int_{-1}^{+1} \varphi^{(n-1)}(x) \varphi^{(n+1)}(x) dx = - \int_{-1}^{+1} \varphi^{(n-2)}(x) \varphi^{(n+2)}(x) dx,$$

.....

$$\int_{-1}^{+1} \varphi'(x) \varphi^{(2n-1)}(x) dx = - \int_{-1}^{+1} \varphi(x) \varphi^{(2n)}(x) dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi'(x) \varphi^{(2n-1)}(x) dx = (2n)! \int_{-1}^{+1} \varphi(x) dx.$$

Temos tambem, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (x-1)(x+1) dx &= -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^{+1} (x-1)^{n+1} (x+1)^{n-1} dx, \\ \int_{-1}^{+1} (x-1)^{n+1} (x+1)^{n-1} dx &= -\frac{n-1}{n+2} \int_{-1}^{+1} (x-1)^{n+2} (x+1)^{n-2} dx, \\ &\dots\dots\dots \\ \int_{-1}^{+1} (x-1)^{2n-1} (x+1) dx &= -\frac{1}{2n} \int_{-1}^{+1} (x-1)^{2n} dx = -\frac{2^{2n+1}}{2n(2n+1)}. \end{aligned}$$

Das egualdades que vimos de escrever resulta a expressão seguinte de R'_{2n} :

$$R'_{2n} = \frac{1 \cdot 2 \dots n \cdot 2^{2n+1}}{(n+1)(n+2) \dots 2n \cdot 3(2n+1)} f^{(2n)}(X').$$

Temos pois

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \int_{-1}^{+1} F_{2n}(x) dx + \frac{1 \cdot 2 \dots n \cdot 2^{2n+1}}{(n+1)(n+2) \dots 2n \cdot 3(2n+1)} f^{(2n)}(X').$$

É bom recordar que, se fôr dado o integral

$$\int_a^b f(x) dx,$$

podemos reduzi-la a outro que tenha para limites -1 e $+1$ pondo

$$x = \frac{a+1}{2} + \frac{b-a}{2} t.$$

ÉSSAI D'UNE THÉORIE ANALYTIQUE DES LIGNES NON-EUCLIDIENNES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

à Rome

(Suite)

§ 69

Problème général. — Sur les tangentes successives d'une ligne plane donnée L on prend, à partir du point de contact, un segment T fonction connue de l'arc. Déterminer la ligne L_1 lieu de l'extrémité de T .

En appelant i l'inclinaison de L_1 sur les tangentes de L , on a (§ 61)

$$\operatorname{tg} T = \frac{\operatorname{tg} \rho_1 \cdot \sin i}{1 + \operatorname{tg} \rho_1 \frac{di}{ds_1}},$$

d'où il suit

$$(15) \quad \cot \rho_1 = \frac{\sin i - \operatorname{tg} T \frac{di}{ds_1}}{\operatorname{tg} T}.$$

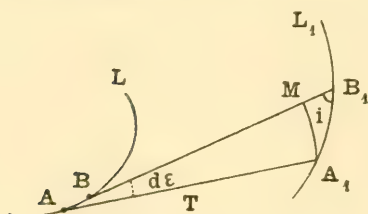


Fig. 30

Cela posé, soient

$$AA_1 = T, \quad BB_1 = T + dT$$

deux tangentes successives de la ligne L , et A_1M l'arc circulaire de centre A et de rayon T compris entre ces tangentes.

En remarquant que (§ 62) $MB_1 = dT + ds$, le triangle rectangle infiniment petit A_1MB_1 donne les relations

$$\sin i \cdot ds_1 = A_1M = \sin T \cdot d\varepsilon = \sin T \cdot \frac{ds}{\operatorname{tg} \varphi},$$

$$ds_1^2 = (dT + ds)^2 + \sin^2 T \frac{ds^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi},$$

d'où, en tenant compte de la formule (15), on dérive les autres

$$(16) \quad \cot \varphi_1 = \frac{\left(\cos T - \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{di}{ds} \right) \sin i}{\sin T}$$

$$(17) \quad \frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{dT}{ds} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + \sin^2 T}}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

En éliminant enfin $\frac{ds}{ds_1}$ entre l'équation (17) et l'autre

$$\sin i = \frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{\sin T}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{ds}{ds_1},$$

on obtient

$$(18) \quad \sin i = \frac{\sin T}{\sqrt{\left(1 + \frac{dT}{ds} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + \sin^2 T}}.$$

Or comme φ et T sont des fonctions connues de l'arc s , on peut à l'aide des équations (16), (17), (18) exprimer φ_1 par une fonction finie de s_1 , ce qui revient à la résolution de notre problème par de simples quadratures.

Dans le plan lobatschewskien on a des formules analogues.

§ 70

Trajectoires équidistantes. — La ligne L_1 du § 69, dans l'hypothèse $T = \text{constante} = m$, s'appelle *trajectoire équidistante* de

L. Sa recherche peut être effectuée à l'aide des relations

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cot \rho_1 = \frac{\left(\cos m - \operatorname{tg} \rho \frac{di}{ds} \right) \sin i}{\sin m}, \\ \frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \rho + \sin^2 m}}{\operatorname{tg} \rho}, \quad \sin i = \frac{\sin m}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \rho + \sin^2 m}}, \end{array} \right.$$

que l'on déduit des équations générales (16), (17), (18) en y introduisant la particularisation $T = m$.

En éliminant $\frac{di}{ds}$ entre la première équation (19) et l'autre

$$\frac{di}{ds} = - \frac{\frac{d\rho}{ds}}{\cos^2 \rho (\operatorname{tg}^2 \rho + \sin^2 m)} \cdot \sin m$$

déduisible par dérivation de la troisième équation (19), on obtient

$$(20) \quad \cot \rho_1 = \frac{\left[\cos m \cdot \cos^2 \rho (\operatorname{tg}^2 \rho + \sin^2 m) + \sin m \cdot \frac{d\rho}{ds} \operatorname{tg} \rho \right] \sin i}{\sin m \cdot \cos^2 \rho (\operatorname{tg}^2 \rho + \sin^2 m)}.$$

Quant à s_1 , la deuxième équation (19) donne par intégration

$$(21) \quad s_1 = c + \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \rho + \sin^2 m}}{\operatorname{tg} \rho} ds,$$

c étant une constant arbitraire; de sorte que l'équation intrinsèque de la trajectoire L_1 est le résultat de l'élimination de s entre les relations (20), (21).

Considérations et calculs analogues dans le plan lobatschewskien.

§ 71

Application à la tractrice. — Nous allons maintenant déterminer l'équation intrinsèque de la tractrice (ligne aux tangentes constantes).

La ligne que l'on cherche jouit évidemment de la propriété caractéristique de posséder une trajectoire équidistante rectiligne. — Si donc on suppose $\rho = \frac{\pi}{2}$ dans l'équation (20), on

obtient après quelques calculs

$$\sin^2 \rho + \sin^2 m \cdot \cos^2 \rho \frac{d\rho}{ds} = -\cot m \cdot ds,$$

d'où il suit par intégration

$$(22) \quad \int \frac{\operatorname{tg} \rho \cdot d\rho}{\sin^2 \rho + \sin^2 m \cdot \cos^2 \rho} = \alpha - s \cdot \cot m$$

α étant une constante arbitraire.

Cette quadrature peut être effectuée en posant $\sin \rho = t$, ce qui donne après quelques calculs

$$\frac{\sin^2 m + \cos^2 m \cdot \sin^2 \rho}{\cos^2 \rho} = c \cdot e^{-2s \cdot \cot m}$$

c étant une constante arbitraire autre que α .

Si l'on résout cette équation par rapport à $\frac{1}{\cos \rho}$, et que l'on opère ensuite d'une façon semblable dans le plan lobatschewskien, on a le théorème: *La tractrice dont les tangentes ont la longueur constante m , est représentée par l'équation intrinsèque*

$$(23) \quad \operatorname{tg} \rho = \sqrt{c \cdot e^{-2s \cdot \cot m} - \sin^2 m} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(23') \quad \operatorname{th} \rho = \sqrt{c \cdot e^{-2s \cdot \coth m} - \operatorname{sh}^2 m} \quad (\text{dans le p. l.}).$$

c étant une constante arbitraire.

Problème inverse. — *L étant une trajectoire équidistante d'une ligne inconnue L_1 , déterminer cette ligne.*

Remarquons préalablement que comme l'on connaît ici la distance m entre les couples de points correspondants des lignes L, L_1 , tout revient à déterminer l'angle i sous lequel les droites à tracer, coupent la ligne L .

A cet effet il suffit d'avoir recours aux équations (3), (3') en y remplaçant T par la constante m . On trouve ainsi que la résolution du problème dépend de l'intégration des équations

différentielles

$$\operatorname{tg} m \cdot \frac{di}{ds} - \sin i + \operatorname{tg} m \cdot \cot \rho = 0$$

$$\operatorname{th} m \cdot \frac{di}{ds} - \sin i + \operatorname{th} m \cdot \coth \rho = 0.$$

Celles-ci sont intégrables par quadratures, aussitôt que l'on en connaît une intégrale particulière (voir le § 63).

§ 73

Courbes parallèles. — Le lieu de l'extrémité d'un segment de longueur constante m , pris sur les normales successives d'une ligne plane L à partir de cette ligne, est une courbe L_1 que l'on dit *parallèle* à L .

L'intervalle constant m est la *distance* des deux lignes parallèles.

Il est évident que *deux courbes parallèles ont même développée*.

Inversement *deux développantes* L , L_1 , *d'une même ligne* L_0 *sont des lignes parallèles*.

En effet si A , A_1 , A_0 sont trois points correspondants des lignes L , L_1 , L_0 , on a (§ 65)

$$\rho = A_0A = c - s_0, \quad \rho_1 = A_0A_1 = c' - s_0$$

et conséquemment

$$AA_1 = \rho_1 - \rho = c' - c = \text{constante},$$

ce qui démontre que L , L_1 sont deux courbes parallèles.

Si A_0AA_1 , B_0BB_1 sont deux normales consécutives communes aux lignes L , L_1 , et $d\varepsilon_0$ l'angle de contingence de L_0 , on a les relations

$$ds = AB = \sin \rho \cdot d\varepsilon_0, \quad ds_1 = A_1B_1 = \sin \rho_1 \cdot d\varepsilon_0 = \sin(\rho + m) \cdot d\varepsilon_0,$$

d'où il suit

$$ds_1 = \frac{\sin(\rho + m)}{\sin \rho} \cdot ds.$$

En opérant d'une façon analogue dans le plan lobatschewskien, on a le théorème: *La courbe parallèle à la ligne* $\rho = \rho(s)$ *et distant* m *de celle-ci, est définie par l'équation intrinsèque résul-*

tant de l'élimination de s entre les deux équations

$$(24) \begin{cases} \rho_1 = \rho + m, \\ s_1 = c + \int \frac{\sin(\rho + m)}{\sin \rho} ds = c + s \cdot \cos m + \sin m \int \cot \rho \cdot ds \end{cases} \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(24') \begin{cases} \rho_1 = \rho + m, \\ s_1 = c + \int \frac{\text{sh}(\rho + m)}{\text{sh} \rho} ds = c + s \cdot \text{ch} m + \text{sh} m \int \coth \rho \cdot ds \end{cases} \quad (\text{dans le p. l.})$$

où c est une constant arbitraire.

Application. — Déterminer deux courbes parallèles, sachant que leurs arcs sont liés entre eux par une relation connue

$$(25) \quad s_1 = \lambda(s).$$

En éliminant s_1 entre les équations (24), (25), on trouve

$$\lambda'(s) = \cos m + \sin m \cdot \cot \rho,$$

d'où il suit

$$\text{tg } \rho = \frac{\sin m}{\lambda'(s) - \cos m}.$$

La ligne L est ainsi déterminée. — Quant à L_1 , son équation intrinsèque est le résultat de l'élimination de s entre la relation (25) et l'autre

$$\rho_1 = \text{arc tg} \left[\frac{\sin m}{\lambda'(s) - \cos m} \right].$$

§ 74

Lignes riemanniennes polaires. — Les pôles des tangentes d'une ligne riemannienne quelconque L sont placés, en général, sur une autre ligne L_1 appelée la *polaire* de L .

Si (A, A_1) , (B, B_1) , (C, C_1) , ... sont des couples de points correspondants des lignes L , L_1 , on a

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + \dots = \frac{\pi}{2},$$

ce qui démontre qu'une ligne plane quelconque et sa polaire sont des courbes parallèles, dont la distance est $\frac{\pi}{2}$.

Il s'ensuit que si L_1 est la polaire d'une ligne L , celle-ci est inversement la polaire de L_1 .

En supposant $m = \frac{\pi}{2}$, les équations (24) reviennent aux autres

$$(26) \quad \rho_1 = \rho + \frac{\pi}{2}, \quad s_1 = c + \int \cot \rho \cdot ds.$$

Ce sont les formules relatives aux lignes polaires riemanniennes.

La théorie des figures polaires sur les deux plans non-euclidiens (dont l'étude serait facilitée par l'introduction de convenables systèmes de coordonnées, autres que ceux que l'on vient d'exposer) présente, dans son allure générale, bien d'analogies avec la correspondante théorie du plan euclidien. — Elle a même portée, même importance dans les trois géométries.

Le principe de dualité, cette précieuse méthode de multiplication des vérités géométriques, en est une conséquence immédiate.

Dans l'impossibilité où nous sommes d'insister davantage sur ce point intéressant, nous nous bornons à rappeler ici cette propriété: *Si de deux figures polaires (euclidiennes ou non), l'une est une conique considérée comme un lieu de points (pôles), l'autre est une conique considérée comme une enveloppe de droites (polaires).*

Exemples. — 1° On trouve par l'application des formules (26), que la polaire de la ligne

$$\operatorname{tg} \rho = as$$

(a étant une constante) est la courbe représentée par l'équation intrinsèque

$$\operatorname{tg} \rho_1 = -\frac{1}{a} e^{a(c-s_1)}.$$

2° Dans l'hypothèse que L soit une spirale isogonale, on a (§ 40)

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \operatorname{tg} (s \cos \theta),$$

et les équations (26) reviennent aux autres

$$\cot \rho_1 = -\frac{1}{\sin \theta} \cdot \operatorname{tg} (s \cos \theta), \quad s_1 = c + \operatorname{tg} \theta \cdot \log \sin (s \cos \theta).$$

En éliminant s entre ces équations, on obtient

$$(27) \quad \operatorname{tg} \varphi = -\sin \theta \sqrt{e^{2\theta} - \sin^2 \theta} - 1.$$

Or si l'on remarque qu'à cause de l'arbitrarité de la constante c , on peut faire en sorte que l'équation (27) coïncide avec l'équation (23) du § 71, on a le théorème: *La courbe polaire d'une spirale isogonale est une tractrice.*

§ 75

Le principe de dualité sur les plans non-euclidiens a une importance très grande d'un autre point de vue, car il sert à réduire, en bien de cas, un problème de géométrie infinitésimale à un autre problème (en générale plus facile) de géométrie finie.

Si O_1, O_2, O_3, \dots sont des points fixes (pôles) pris sur le plan d'une ligne riemannienne L , et p_1, p_2, p_3, \dots les perpendiculaires $O_1P_1, O_2P_2, O_3P_3, \dots$ abaissées de ces points sur la tangente générique t , elles vont passer par même point Ω , le pôle de t . En effectuant cette construction à chaque position de la tangente variable t , on a une infinité de points tel que Ω , dont le lieu est la courbe polaire de L .

Or si, dans la position générique de Ω , on pose

$$O_1\Omega = R_1, \quad O_2\Omega = R_2, \quad O_3\Omega = R_3, \dots$$

il résulte évidemment

$$p_1 = \frac{\pi}{2} - R_1, \quad p_2 = \frac{\pi}{2} - R_2, \quad p_3 = \frac{\pi}{2} - R_3, \dots$$

On a donc ce principe: *Si la tangente à chaque point d'une ligne L jouit de la propriété exprimée par l'équation*

$$\varphi(p_1, p_2, p_3, \dots) = 0,$$

pour la ligne L_1 , polaire de L , est vérifiée la relation

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - R_1, \quad \frac{\pi}{2} - R_2, \quad \frac{\pi}{2} - R_3, \dots\right) = 0.$$

Et vice versa.

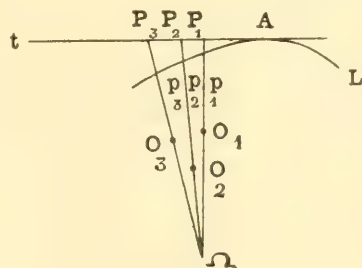


Fig. 31

Applications. — 1° Si pour une ligne L rapportée à deux pôles O_1, O_2 subsiste l'une des relations

$$(28) \quad p_1 + p_2 = m$$

$$(29) \quad \sin p_1 + \sin p_2 = m,$$

m étant une constante, pour la courbe L_1 on a respectivement

$$(28') \quad R_1 + R_2 = \pi - m$$

$$(29') \quad \cos R_1 \cos R_2 = m.$$

L'équation (28') définit évidemment une ellipse L_1 ayant les foyers aux points O_1, O_2 .

Quant à l'équation (29'), si l'on pose l'origine des coordonnées polaires (R, ω) au milieu O du segment $O_1O_2 = 2c$, on trouve pour équation de la courbe polaire L_1

$$\cos^2 R \cdot \cos^2 c - \sin^2 R \sin^2 c \cdot \cos^2 \omega = m^2.$$

En la réduisant aux coordonnées ξ, η à l'aide des relations

$$\xi = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} R \cdot \cos \omega, \quad \eta = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} R \cdot \sin \omega, \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \operatorname{tg} R,$$

on obtient l'équation

$$(m^2 + \sin^2 c) \xi^2 + m^2 \eta^2 = \cos^2 c - m^2,$$

qui définit une ellipse de foyers O_1, O_2 .

Mais comme la courbe polaire d'une ellipse est une autre ellipse de même foyer (§ 74) on conclut que: *La ligne riemannienne à deux pôles représentée par une des équations (28), (29), est une ellipse ayant les foyers en ces pôles.*

2° Dans l'étude des lignes planes par la méthode que l'on vient d'indiquer, il est souvent utile l'emploi des formules connues (§ 32)

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\sin R \cdot dR}{d \sin p}, \quad \cos \theta = \pm \frac{dR}{ds}$$

définissant le rayon de courbure ρ et l'inclinaison θ du rayon vecteur R sur la ligne.

Si l'on veut par exemple étudier la ligne (29) en suivant ce procédé, on remarquera d'abord que l'on a ici pour $\operatorname{tg} \rho$ les

deux expressions

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin R_1 dR_1}{d \sin p_1} = \frac{\sin R_2 dR_2}{d \sin p_2},$$

d'où l'on déduit

$$d \sin p_1 = \frac{\sin R_1 dR_1}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad d \sin p_2 = \frac{\sin R_2 dR_2}{\operatorname{tg} \varphi},$$

et l'équation différentielle

$$\frac{d \sin p_1}{\sin p_1} + \frac{d \sin p_2}{\sin p_2} = 0$$

tirée de la relation (29) donne successivement

$$\begin{aligned} \frac{\sin R_1 dR_1}{\sin p_1} + \frac{\sin R_2 dR_2}{\sin p_2} &= 0, & \frac{dR_1}{\sin \theta_1} + \frac{dR_2}{\sin \theta_2} &= 0, \\ \frac{\cos \theta_1 ds}{\sin \theta_1} \pm \frac{\cos \theta_2 ds}{\sin \theta_2} &= 0, & \operatorname{tg} \theta_1 &= \pm \operatorname{tg} \theta_2. \end{aligned}$$

Cette relation angulaire équivaut évidemment à l'autre

$$\cos \theta_1 = \pm \cos \theta_2,$$

ce qui donne

$$dR_1 \pm dR_2 = 0$$

et enfin par intégration

$$R_1 \pm R_2 = \text{const.}$$

On tombe ainsi sur l'équation d'une conique, ce qui devait bien arriver.

§ 76

Lignes tangentielles. — Si sur les tangentes successives d'une ligne plane L , et à partir du point de contact, on prend un segment de longueur constante $\frac{\pi}{2}$, la ligne L_1 que l'on obtient s'appelle *courbe tangentielle de L* .

Construisons la développée L_2 de la ligne L , et soient A , A_1 , A_2 trois points correspondants des lignes L , L_1 , L_2 . Comme le point A_1 est le pôle de la droite AA_2 , tangente à la courbe L_2 en A_2 , on a que la *ligne tangentielle* L_1

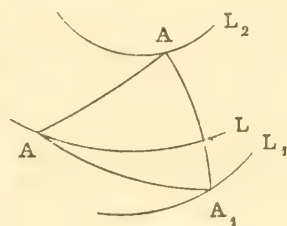


Fig. 22

et la développée L_2 d'une même ligne plane L , sont deux courbes polaires.

Or pour la ligne L_2 développée de L , et pour la ligne L_1 polaire de L_2 on a respectivement les formules (§§ 67-74).

$$\operatorname{tg} \rho_2 = -\sin \rho \cdot \frac{d\rho}{ds}, \quad s_2 = -\rho$$

$$\rho_1 = \rho_2 + \frac{\pi}{2}, \quad s_1 = \int \cot \rho_2 ds_2.$$

Si donc on élimine d'ici le paramètre s_2 , on obtient

$$(30) \quad \cot \rho_1 = \sin \rho \cdot \frac{d\rho}{ds}, \quad s_1 = \int \frac{ds}{\sin \rho}.$$

Ce sont les équations relatives à la tangentielle d'une ligne riemannienne.

Dans le plan lobatschewskien on a des équations analogues.

Applications. — 1° Si ρ est constant, la première relation (30) donne

$$\cot \rho_1 = 0, \quad \text{et} \quad \rho_1 = \frac{\pi}{2}$$

ce qui démontre que la tangentielle d'un cercle riemannien est une droite, et vice versa.

2° Quand la ligne L est une développante de cercle de rayon r , on a (§ 65)

$$\cos \rho = -s \cdot \operatorname{tg} r,$$

et conséquemment

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\operatorname{tg} r}{\sqrt{1 - s^2 \operatorname{tg}^2 r}}.$$

Ainsi la première équation (30) donne

$$\cot \rho_1 = \operatorname{tg} r,$$

d'où il suit

$$\rho_1 = \frac{\pi}{2} - r.$$

Cela démontre que la développante de cercle riemannienne jouit de la propriété caractéristique que sa ligne tangentielle est un cercle.

§ 77

Lignes conjuguées suivant une relation vectorielle. — Supposons que les lignes L, L_1 se correspondent point par point de façon, que deux points correspondants quelconques soient toujours sur une droite passant par le pôle, et que les rayons vecteurs correspondants soient liés entre eux par la relation

$$(31) \quad R_1 = F(R).$$

Si OAA_1, OBB_1 sont deux rayons vecteurs infiniment rapprochés, dans l'hypothèse du plan riemannien on a les relations (§ 23)

$$AB = ds = \sqrt{dR^2 + \sin^2 R \cdot d\omega^2}, \quad A_1B_1 = ds_1 = \sqrt{dR_1^2 + \sin^2 R_1 \cdot d\omega^2},$$

d'où il suit

$$(32) \quad \frac{ds^2 - dR^2}{ds_1^2 - dR_1^2} = \frac{\sin^2 R}{\sin^2 R_1}.$$

En éliminant enfin R_1 entre les équations (31), (32), on obtient par intégration

$$(33) \quad s_1 = c + \int \frac{\sqrt{(1 - R'^2) \cdot \sin^2 F(R) + \sin^2 R \cdot F'^2(R) \cdot R'^2}}{\sin R} \cdot ds,$$

c étant une constante arbitraire.

En concluant: *La ligne conjuguée à la courbe*

$$(34) \quad R = R(s)$$

suivant la relation générique (31), est représentée (en coordonnées radiales) par l'équation résultant de l'élimination de s entre les équations (33) et (34).

Pour les lignes lobatschewskiennes subsistent des formules analogues.

§ 78

Conchoïdes. — Une conchoïde L_1 d'une ligne L s'obtient en allongeant ou en accourçant d'une quantité constante les rayons vecteurs de la ligne issus d'un point fixe.

Comme les rayons vecteurs R, R_1 , des lignes L, L_1 sont liés par la relation $R_1 = R + m$, m étant une constante (positive ou négative), les formules du § 77 nous apprennent qu'une con-

choïde quelconque de la ligne (34) est définie (en coordonnées radiales) par l'équation résultant de l'élimination de s entre les équations

$$(35) \quad R_1 = R(s) + m, \quad s_1 = c + \int \frac{\sqrt{(1-R'^2)\sin^2(R+m) + R'^2\sin^2 R}}{\sin R} ds.$$

En remarquant que les lignes L , L_1 sont représentables, en coordonnées polaires, par des équations de la forme

$$R = f(\omega), \quad R_1 = f(\omega) + m,$$

leurs sous-normales polaires vérifient la relation (§ 34)

$$\operatorname{tg} S_n = \operatorname{tg} S_{1n} = f'(\omega),$$

d'où il suit

$$S_n = S_{1n}.$$

On conclut d'ici qu'une ligne plane arbitraire (euclidienne ou non) et l'une quelconque de ses conchoïdes, ont même sous-normale polaire.

Conchoïde de Nicomède (conchoïde d'une droite). — En remarquant que la droite est représentée par une des équations

$$\operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin \omega}, \quad \cos R = \cos a \cdot \cos s,$$

où a est une constante, il résulte des formules précédentes que la conchoïde de Nicomède est définie par l'équation polaire

$$\operatorname{tg}(R + m) = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin \omega},$$

ou bien par les deux équations paramétriques

$$\begin{cases} R_1 = \arccos(\cos a \cos s) + m \\ s_1 = c + \int \frac{\sqrt{\sin^2 a (\cos m \sqrt{1 - \cos^2 a \cdot \cos^2 s} + \sin m \cos a \cdot \cos s)^2 + \cos^2 a \sin^2 s (1 - \cos^2 a \cdot \cos^2 s)}}{1 - \cos^2 a \cdot \cos^2 s} ds. \end{cases}$$

Dans le plan lobatschewskien on a des résultats analogues.

§ 79

Podaires. — La podaire d'une ligne L par rapport au pôle O , est la ligne L_1 lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du

point O sur les tangentes successives de L. — La ligne L s'appelle inversement l'*antipodaire* de L₁.

Le pôle étant à l'origine, soient OA = R, OA₁ = R₁ deux rayons vecteurs correspondants de la ligne L et de sa podaire L₁, u l'angle de ces vecteurs, T la distance entre les points correspondants des deux courbes, et θ l'inclinaison du vecteur R sur L. — En supposant que le plan soit riemannien, le triangle rectangle OA₁A donne les équations

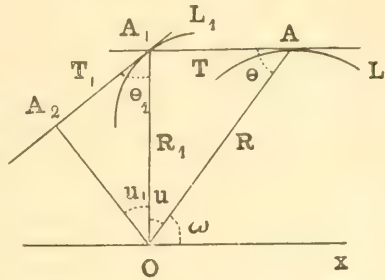


Fig. 33

$$\sin R_1 = \sin R \cdot \sin \theta, \quad \cos T = \frac{\cos R}{\cos R_1}, \quad \sin u = \frac{\sin T}{\sin R}$$

qui, en vertu de la relation

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2} = \frac{\sin R}{\sqrt{\sin^2 R + \left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2}},$$

reviennent aux autres

$$(36) \quad \sin R_1 = \sin R \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2} = \frac{\sin^2 R}{\sqrt{\sin^2 R + \left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2}}$$

$$(37) \quad \sin T = \frac{\sin R \cdot \frac{dR}{ds}}{\sqrt{\cos^2 R + \sin^2 R \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}} = \frac{\sin R \cdot \frac{dR}{d\omega}}{\sqrt{\sin^2 R \cos^2 R + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}}$$

$$(38) \quad \sin u = \frac{\frac{dR}{ds}}{\sqrt{\cos^2 R + \sin^2 R \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}} = \frac{\frac{dR}{d\omega}}{\sqrt{\sin^2 R \cos^2 R + \left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2}}$$

Ces formules suffisent pour la détermination de la podaire.

En effet si

$$(39) \quad R = f(\omega)$$

est l'équation polaire de la ligne L, en remarquant que $\omega_1 = u + \omega$, on conclut que l'équation de la podaire L_1 est le résultat de l'élimination de ω entre les équations

$$(40) \quad \begin{cases} \sin R_1 = \frac{\sin^2 f(\omega)}{\sqrt{\sin^2 f(\omega) + f'^2(\omega)}}, \\ \cos \omega_1 = \frac{\sin f(\omega) \cdot \cos f(\omega) \cdot \cos \omega - f'(\omega) \cdot \sin \omega}{\sqrt{\sin^2 f(\omega) \cdot \cos^2 f(\omega) + f'^2(\omega)}}. \end{cases}$$

L'équation (17) du § 69 donne par intégration

$$(41) \quad s_1 = \int \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{dT}{ds}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \rho + \sin^2 T}}{\operatorname{tg} \rho} \cdot ds + \text{const.}^e$$

Or si l'on définit la ligne L par l'équation

$$(42) \quad R = R(s)$$

en coordonnées radiales, les quantités T et ρ [en vertu respectivement de la première équation (37), et de l'équation (32) du § 32] résultent des fonctions connues de s.

Il suffit alors d'éliminer s entre les relations (36) et (41), pour avoir l'équation de la podaire L_1 en coordonnées radiales (R_1, s_1).

Remarque. — Du moment que T est à regarder comme une fonction connue de s, dans la recherche de la podaire L_1 on peut aussi employer la méthode que l'on vient d'expliquer au § 69.

§ 80

Antipodaires. — La podaire L_1 d'une ligne L (inconnue) soit définie par l'équation

$$R_1 = R_1(s_1)$$

en coordonnées radiales.

La construction *graphique* de l'antipodaire L se réduit évidemment à élever les perpendiculaires r aux rayons vecteurs en leurs extrémités. L'enveloppe de ces droites r est la ligne cherchée.

Or comme le rayon vecteur R_1 coupe la ligne L_1 sous l'angle θ_1 défini par l'équation

$$\cos \theta_1 = \frac{dR_1}{ds_1},$$

en désignant par i l'inclinaison de la droite r sur la ligne L_1 , on a

$$\sin i = \frac{dR_1}{ds_1}.$$

Une fois que l'angle i est déterminé en fonction de l'arc s_1 de la ligne L_1 , l'enveloppe L des droites r peut être déterminée par la méthode du § 61.

§ 81

Si l'on rappelle les propriétés fondamentales de la représentation des plans non-euclidiens sur le plan euclidien (§§ 15-16), on a le théorème : *Une ligne plane quelconque L et sa podaire L_1 par rapport à l'origine, ont pour image une ligne L' et sa podaire L'_1 par rapport à l'origine. Et réciproquement.*

A l'aide de ce théorème l'étude des podaires et des anti-podaires non-euclidiennes est ramenée à l'étude analogue sur le plan euclidien.

Exemples. — 1° Soit L une ligne non-euclidienne, L_1 sa podaire par rapport à l'origine O , et L_2 la podaire de L_1 (deuxième podaire de L).

En faisant la représentation de la figure sur le plan euclidien, on obtient une certaine ligne L' et ses deux podaires successives L'_1 , L'_2 . Si l'on désigne par A , A_1 , A_2 trois points correspondants des lignes L , L_1 , L_2 , leurs images A' , A'_1 , A'_2 sont trois points correspondants des lignes L , L'_1 , L'_2 .

Or en vertu d'une propriété connue des podaires successives d'une ligne euclidienne, on a

$$A'\hat{O}A'_1 = A'_1\hat{O}A'_2.$$

Mais comme la représentation conserve les angles dont le sommet est à l'origine (§ 16) on a aussi $A\hat{O}A_1 = A_1\hat{O}A_2$. Cela démontre que *quelle que soit la nature du plan, le rayon vecteur de la première podaire d'une ligne quelconque est la bisectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs correspondants de la ligne primitive et de sa deuxième podaire.*

2° *Antipodaire d'une droite.* — En faisant la représentation du

plan non-euclidien sur le plan euclidien, l'image de la ligne cherchée est une ligne dont la podaire, par rapport au pôle O_1 , est une droite. Elle est donc une parabole ayant le foyer en O_1 , et conséquemment *l'antipodaire de la droite est une conique dont un des foyers est à l'origine.*

§ 82

Roulettes. — Soient L et L_1 deux lignes décrites sur les plans superposés Π et Π_1 , le premier fixe et le deuxième mobile sous ces conditions :

1° qu'il reste toujours superposé à Π ;

2° que la ligne L_1 de Π_1 roule sans glisser sur la ligne L de Π , en restant toujours tangente à cette ligne.

Le mouvement du plan Π_1 est ainsi déterminé.

On demande d'abord de *déterminer la trajectoire L_0 (roulette) décrite, sur le plan fixe Π , par un point quelconque A_0 du plan mobile Π_1 .*

Soient ds_0 l'arc élémentaire de la trajectoire L_0 , ds l'arc élémentaire commun des lignes L , L_1 (superposables l'une à l'autre pendant le mouvement), ρ et ρ_1 les rayons de courbure de ces lignes et R_1 le rayon vecteur joignant le point générateur A_0 à un point arbitraire de L_1 .

Pour la détermination de la ligne fixe L , on fera usage des coordonnées intrinsèques; cela équivaut à considérer le rayon de courbure ρ comme une fonction connue de l'arc s .

Quant à la ligne mobile L_1 , nous la définirons par une équation

$$(43) \quad R_1 = f(s)$$

en coordonnées radiales. Mais si l'on devra considérer son rayon de courbure ρ_1 , on rappellera qu'il est donné (dans le plan riemannien) par la relation (§ 32)

$$(44) \quad \operatorname{tg} \rho_1 = \frac{\sin R_1 \sqrt{1 - R_1'^2}}{(1 - R_1'^2) \cos R_1 - R_1'' \sin R_1} = F(s),$$

$F(s)$ désignant une fonction connue de l'arc s .

Nous regarderons enfin les lignes L , L_1 comme des polygones à côtés infiniment petits et égaux deux à deux; en chacun de ces polygones l'angle extérieur de deux côtés consécutifs est à considérer, à la limite, comme l'angle de contingence de la ligne correspondante.

Cela posé, supposons que les deux polygones à l'instant

initial soient à contact le long de l'élément infinitésimal MA appartenant à une certaine droite t , que l'on peut regarder comme une tangente commune aux deux lignes.

Le mouvement de la figure mobile à l'instant successif équivaut à une rotation infiniment petite autour du point A, en vertu de laquelle l'élément AB_1 de la ligne mobile va coïncider avec l'élément AB de la ligne fixe.

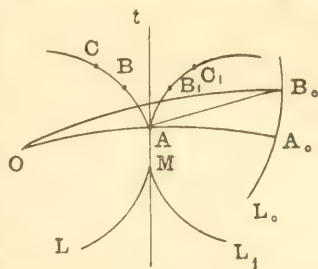


Fig. 34

Pendant cette rotation le point générateur A_0 décrit un arc circulaire infiniment petit A_0B_0 de centre A. L'angle $A_0\hat{A}B_0$ décrit par le vecteur AA_0 est égal à l'angle $B\hat{A}B_1$, qui à son tour est égal à la somme (ou à la différence) des angles de contingence $d\varepsilon, d\varepsilon_1$ des lignes L, L_1 aux points B, B_1 . — Nous avons donc

$$A_0B_0 = ds_0 = (d\varepsilon \pm d\varepsilon_1) \sin R_1 = (\cot \varphi \pm \cot \varphi_1) \sin R_1 \cdot ds,$$

et conséquemment

$$(45) \quad \frac{ds_0}{ds} = (\cot \varphi \pm \cot \varphi_1) \cdot \sin R_1.$$

Si l'on rappelle les équations (43), (44), on déduit d'ici par intégration

$$(46) \quad s_0 = \int \left[\cot \varphi \pm \frac{1}{r(s)} \right] \sin f(s) \cdot ds,$$

de sorte que l'arc s_0 de la trajectoire L_0 est exprimé en fonction de l'arc s de la ligne fixe.

Prolongeons maintenant la normale A_0A de la trajectoire L_0 jusqu'au centre de courbure O.

Comme le rayon vecteur $A_0A = R_1$ coupe la ligne L_1 (et conséquemment L) au point A sous l'angle θ tel que

$$\cos \theta = \frac{dR_1}{ds},$$

on obtient par l'application de la formule (3) du § 61

$$\operatorname{tg} AO = \frac{\sin \theta}{\cot \varphi_1 \pm \frac{d\theta}{ds}},$$

c'est-à-dire

$$(47) \quad \operatorname{tg} AO = \frac{1 - \left(\frac{dR_1}{ds}\right)^2}{\frac{1}{R(s)} \sqrt{1 - \left(\frac{dR_1}{ds}\right)^2 - \frac{d^2 R_1}{ds^2}}} = \lambda(s),$$

$\lambda(s)$ étant une fonction connue de l'arc s .

Si l'on désigne enfin par ρ_0 le rayon de courbure de la trajectoire L_0 , en remarquant que

$$\rho_0 = A_0 A + AO,$$

on a la formule

$$(48) \quad \operatorname{tg} \rho_0 = \frac{\operatorname{tg} f(s) + \lambda(s)}{1 - \operatorname{tg} f(s) \cdot \lambda(s)}$$

L'élimination de s entre les équations (46), (48) conduit à une relation finie et connue entre ρ_0 et s_0 , ce qui définit complètement la roulette L_0 (§ 43).

Cette analyse, à peu de modifications près, peut être étendue au plan lobatschewskien.

§ 83

En se rapportant à la figure du § 82, les secteurs infiniment petits OA_0B_0 , OAB peuvent être considérés comme des triangles.

Or comme (en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur) on peut prendre

$$\sin A_0B_0 = A_0 B_0, \quad \sin AB = AB.$$

on déduit de ces triangles :

$$(49) \quad \begin{cases} \sin(A_0 \hat{O} B_0) = \frac{A_0 B_0 \cdot \sin \hat{A}_0}{\sin OA_0} = \frac{ds_0}{\rho_0}, \\ \sin(A \hat{O} B) = \frac{AB \cdot \sin \hat{A}}{\sin OA} = \frac{\sin \theta \cdot ds}{\sin(\rho_0 - R_1)}, \end{cases}$$

les lettres ayant même signification qu'auparavant.

Si l'on élimine $\frac{ds_0}{ds}$ entre l'équation (45) et l'autre

$$(50) \quad \frac{ds_0}{ds} = \frac{\sin \rho_0}{\sin(\rho_0 - R_1)} \cdot \sin \theta,$$

que l'on dérive en égalant les deuxièmes membres des formules (49), on trouve

$$(51) \quad \frac{\sin \rho_0}{\sin (\rho_0 - R_1)} = (\cot \rho \pm \cot \rho_1) \frac{\sin R_1}{\sin \theta}.$$

Cette relation remarquable entre les rayons de courbure ρ , ρ_1 , ρ_0 des lignes L , L_1 , L_0 , le rayon vecteur R_1 de la ligne mobile L_1 et son inclinaison θ sur la ligne, est susceptible d'intéressantes applications dans les questions qui se rattachent à la théorie des roulettes.

À la relation (51), valable dans le plan riemannien, fait pendant une autre relation analogue, aisément démontrable, du plan lobatschewskien.

§ 84

Applications. — 1° Considérons la *cycloïde*, c'est-à-dire la trajectoire décrite par un point d'un cercle invariable (de rayon r) qui roule, sans glisser, sur une droite fixe (*base*).

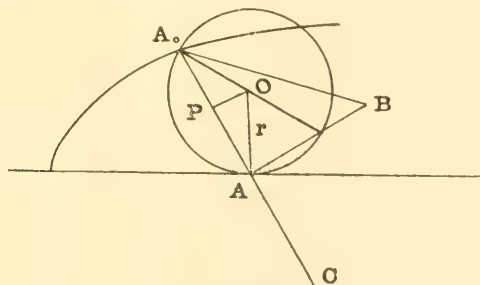


Fig. 35

En ayant ici $\cot \rho = 0$, l'équation (51) revient à l'autre

$$(52) \quad \frac{\sin \rho_0}{\sin (\rho_0 - R_1)} = \frac{\cot r \cdot \sin R_1}{\sin \theta}.$$

Or si du centre O du cercle, considéré à l'une quelconque de ses positions, on abaisse la perpendiculaire OP sur le rayon vecteur $OA_0 = R_1$, le triangle rectangle OAP donne la relation

$$\operatorname{tg} PA = \operatorname{tg} OA \cdot \cos (\hat{OAP}),$$

..

c'est-à-dire

$$(53) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{R_1}{2} \right) = \operatorname{tg} r \cdot \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\cot r}.$$

L'élimination du rapport $\frac{\cot r}{\sin \theta}$ entre les équations (52), (53) conduit à la formule

$$\frac{\sin \rho_0}{\sin (\rho_0 - R_1)} = \frac{\sin R_1}{\operatorname{tg} \left(\frac{R_1}{2} \right)} = 2 \cos^2 \left(\frac{R_1}{2} \right) = 1 + \cos \left(\frac{R_1}{2} \right),$$

d'où après quelques calculs

$$(54) \quad \operatorname{tg} \rho_0 = - \frac{(1 + \cos R_1) \sin R_1}{1 - \cos R_1 - \cos^2 R_1},$$

et enfin

$$(55) \quad \operatorname{tg} (\rho_0 - R_1) = \sin R_1.$$

Telle formule, remarquable pour sa simplicité, fournit cette construction du centre de courbure à un point quelconque A_0 de la cycloïde: Joignons A_0 au point A, où le cercle générateur touche la base de la cycloïde.

Aux extrémités A_0 , A du segment A_0A construisons respectivement un angle de 45° et un angle droit, en prolongeant leurs deuxièmes côtés jusqu'à leur rencontre au point B. Portons enfin, sur le prolongement de A_0A , le segment $AC = AB$; le point C est le centre de courbure cherché.

2° Trouver la ligne plane dont le rayon de courbure est double du segment de normale, compris entre la courbe et une droite fixe.

Regardons la ligne cherchée comme une roulette L_0 engendrée par un point A_0 lié invariablement à une certaine ligne (inconnue) L_1 , qui roule sans glissement sur la droite fixe L.

Dans cette hypothèse on peut employer l'équation (51) pourvu que l'on y fasse $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\rho_0 = 2\rho$, $\rho_0 - R_1 = \rho$. Il résulte ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2R_1}{\sin R_1} &= \cot \varphi_1 \frac{\sin R_1}{\sin \theta} \\ &= \cot \varphi_1 \frac{\sin^2 R_1}{\sin p}, \end{aligned}$$

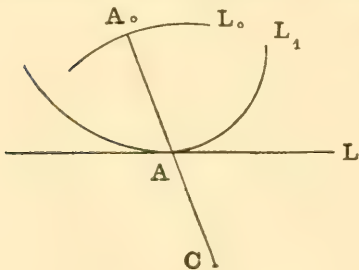


Fig. 36

p désignant la distance du point A_0 aux tangentes de la ligne mobile L_1 .

La relation

$$\lg p = \frac{\sin^2 R_1}{2 \cos R_1 \cdot \sin p},$$

que l'on tire d'ici, comparée à l'équation générale (31) du § 32, donne

$$\frac{2 \cos R_1 \cdot dR_1}{\sin R_1} = \frac{d \sin p}{\sin p}.$$

Telle est l'équation différentielle de la ligne mobile. — Or comme l'on déduit d'ici par intégration

$$(56) \quad \sin p = c \cdot \sin^2 R_1,$$

c étant une constante arbitraire, il suffit d'appliquer les formules du § 46 pour voir que *la ligne mobile L_1 est représentée (en coordonnées radiales) par l'équation*

$$(57) \quad \int \frac{dR_1}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 R_1}} = s + s_0,$$

s_0 étant une constante arbitraire.

En remarquant que $\sin p = \sin R_1 \cdot \sin \theta$, la relation (56) donne

$$\sin \theta = c \cdot \sin R_1;$$

de sorte que si l'on a recours aux formules du § 44, on trouve que *la ligne mobile L_1 est représentée par l'équation polaire*

$$(58) \quad \omega - \omega_0 = c \int \frac{dR_1}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 R_1}},$$

ω_0 étant une constante arbitraire.

Une fois que la ligne mobile L_1 a été déterminée, la ligne L_0 engendrée par le pôle dans le roulement de L_1 sur la droite, résout notre problème.

La comparaison des équations (57), (58) démontre que *la ligne L_1 que l'on vient de déterminer jouit de la remarquable propriété que l'angle polaire est une fonction linéaire de l'arc.*

Dans cette ligne beaucoup de problèmes, tel que celui de la bisection ou de la multiplication d'un arc quelconque, sont ramenés aux problèmes correspondants sur un angle.

Dans le cas particulier $c = 1$ la ligne L_1 est définie par une des équations

$$R_1 + \frac{\pi}{2} = e^s + s_0 = e^{\omega} + \omega_0.$$

3° Un point lié invariablement à une ligne plane L_1 (inconnue), qui roule sur un cercle donné (de rayon r), engendre une droite. Trouver la ligne mobile L_1 .

En ayant ici $\rho = r$, $\rho_0 = \frac{\pi}{2}$, $\rho_0 - R_1 = \frac{\pi}{2} - R_1$, l'équation (51) revient à l'autre

$$\cot \rho_1 = \cot r + \frac{\sin \theta}{\sin R_1 \cos R_1} = \cot r + \frac{\sin p}{\sin^2 R_1 \cos R_1};$$

de sorte que si l'on rappelle la formule (31) du § 32, on obtient pour équation différentielle de la ligne cherchée

$$(59) \quad \frac{1}{\sin R_1} \cdot \frac{d \sin p}{d R_1} - \frac{\sin p}{\sin^2 R_1 \cos R_1} = \cot r.$$

En posant $\cos R_1 = x$, $\sin p = y$, cette équation se réduit linéaire et donne par intégration

$$(60) \quad \sin p = \cot r \cdot \sin R_1 \operatorname{tg} R_1 + c \cdot \operatorname{tg} R_1.$$

Telle est l'équation de la ligne cherchée en coordonnées (R_1, p) . On peut passer aux coordonnées radiales et polaires en employant successivement les formules des §§ 46 et 37.

Cas particulier. — En supposant $c = 0$ et en remarquant en outre que $\sin p = \sin R_1 \sin \theta$, l'équation (60) donne

$$\sin \theta = \cot r \cdot \operatorname{tg} R_1.$$

On en conclut (§ 44) que la ligne L_1 est définie par l'équation polaire

$$(61) \quad \omega + \omega_0 = \cot r \int \frac{dR_1}{\sqrt{\cos^2 R_1 - \cot^2 r \cdot \sin^2 R_1}},$$

ω_0 étant une constante arbitraire.

Si le cercle, base de la roulette, se réduit à une droite, on a $\cot r = 0$ et l'équation (60) de la ligne mobile revient à l'autre

$$\sin p = c \cdot \operatorname{tg} R_1.$$

Cette équation, lorsque $c < 1$, représente la développée d'une spirale isogonale (§ 47).

Remarque. — Dans le plan lobatschewskien on a des formules et des résultats analogues.

§ 85

Si dans une question concernant les roulettes, la ligne mobile est une droite, il vaut mieux souvent d'envisager le problème directement, car il se peut que les formules générales ne soient pas applicables, au moins dans leur forme actuelle.

Sur une ligne plane quelconque L que l'on fasse rouler, sans glissement, une quelconque de ses tangentes t . Comme dans ce mouvement un point quelconque de t décrit une développante de L , la roulette peut être ici déterminée à l'aide des formules du § 65.

Considérons maintenant un point A extérieur à la tangente t , mais lié rigidement à cette droite. En joignant A à un point quelconque B de t , la distance AB , ainsi que l'angle \widehat{ABC} restent invariants dans le roulement de la tangente t sur la ligne L .

Et comme d'ailleurs la trajectoire du point B est une développante de L , on conclut que : *La roulette L_0 décrite par le point A est le lieu des extrémités d'un système de segments égaux, inclinés d'un angle constant sur une développante de la ligne fixe L .*

Considérons en particulier la développante de L engendrée par le pied C de la perpendiculaire abaissée du point A sur la tangente t .

Comme la droite AC est toujours tangente à la trajectoire du point C , on a que : *La roulette L_0 engendrée par le point A peut être considérée comme une trajectoire équidistante (§ 70) d'une certaine développante de la ligne fixe L .*

Un déplacement instantané de la tangente t sur la ligne L , peut être regardé comme une rotation infiniment petite autour du point de contact P . Pendant une telle rotation, le point A décrit un arc de cercle infiniment petit tangent à la roulette L_0 au point A ; la normale commune à cet arc circulaire et à la ligne L_0 en A , passe par le point de contact P , c'est-à-dire par

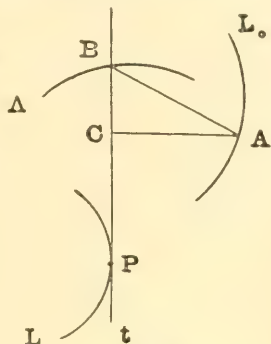


Fig. 37

le centre de courbure de la développante de L engendrée par le point C .

Il s'ensuit que : *La normale à un point quelconque d'une trajectoire équidistante d'une ligne plane quelconque (euclidienne ou non) passe par le centre de courbure correspondant de cette ligne.*

Ce théorème peut être employé avec succès pour la construction de la normale (et conséquemment de la tangente) à une trajectoire équidistante d'une ligne plane quelconque. Entre ces trajectoires il y a évidemment la *tractrice*:

CHAPITRE VI

§ 86

Une particulière représentation conforme. — La représentation des plans non-euclidiens sur le plan euclidien, à l'aide de la transformation que l'on va établir, est d'une grande utilité dans la résolution de beaucoup de questions concernant les lignes planes.

Si l'on suppose que la position des points sur le plan non-euclidien donné et sur le plan euclidien de représentation soit fixée par leurs coordonnées polaires (R, ω) , (R_1, ω_1) , la correspondance entre les deux plans est définie par les relations

$$(1) \quad R_1 = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{R}{2} \right), \quad \omega_1 = \omega \quad (\text{dans le p. r.})$$

$$(1') \quad R_1 = 2 \operatorname{th} \left(\frac{R}{2} \right), \quad \omega_1 = \omega \quad (\text{dans le p. l.})$$

et leurs inverses.

On reconnaît d'ici que, s'il s'agit du plan riemannien, son image envahit tout le plan euclidien.

Quant au plan lobatschewskien, comme $\operatorname{th} \left(\frac{R}{2} \right)$ ne peut pas atteindre une valeur supérieure à l'unité, il résulte nécessairement $R_1 \leq 2$: ce qui démontre que dans ce cas l'image du plan est toute à l'intérieur du cercle de rayon 2 ayant le centre à l'origine.

Si l'on désigne par s et s_1 l'arc de la ligne (riemannienne) L et de son image L_1 , on a par l'application de la formule (6) du § 23

$$(2) \quad ds_1 = \sqrt{dR_1^2 + R_1^2 d\omega_1^2} = \frac{\sqrt{dR^2 + \sin^2 R \cdot d\omega^2}}{\cos^2 \left(\frac{R}{2} \right)} = \frac{ds}{\cos^2 \left(\frac{R}{2} \right)}.$$

D'ailleurs comme

$$\cos^2\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{R}{2}\right)} = \frac{4}{4 + R_1^2},$$

la relation (2) donne

$$(3) \quad ds = \frac{4}{4 + R_1^2} \cdot ds_1.$$

Dans le plan lobatschewskien les équations (2), (3) sont remplacées respectivement par les autres

$$(2') \quad ds_1 = \frac{ds}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{R}{2}\right)}$$

$$(3') \quad ds = \frac{4}{4 - R_1^2} \cdot ds_1.$$

Le rôle joué par ces équations est évident:

1. Si la ligne L est définie par une équation

$$(4) \quad F(R, s) = 0$$

en coordonnées radiales, l'élimination de R et s entre les relations (1), (4) et l'intégrale de l'équation (2), conduit à une relation finie entre R_1 et s_1 , ce qui définit l'image L_1 .

2. Inversement, si L_1 a une équation connue

$$(5) \quad f(R_1, s_1) = 0,$$

il suffit d'éliminer R_1 et s_1 entre les relations (1), (5) et l'intégrale de l'équation (3), pour avoir une relation finie entre R et s, définissant la ligne primitive L.

Considérations analogues dans le plan lobatschewskien.

Cette analyse nous apprend que l'une des lignes L, L_1 définit complètement l'autre.

§ 87

La représentation dont il s'agit est conforme, c'est-à-dire qu'elle conserve l'angle de deux lignes quelconques.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que les inclinaisons θ , θ_1 d'une ligne quelconque L et de son image L_1

sur les rayons vecteurs correspondants issus du pôle, sont égales entre elles, car l'angle de deux lignes et celui de leurs images sont toujours la somme (ou la différence) respectivement de deux angles θ et de deux angles θ_1 .

Or comme l'on déduit des relations (1), (2)

$$\cos \theta_1 = \frac{dR_1}{ds_1} = \frac{dR_1}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_1} = \frac{\frac{dR}{ds}}{\cos^2 \left(\frac{R}{2} \right)} \cdot \cos^2 \left(\frac{R}{2} \right) = \frac{dR}{ds}$$

il résulte

$$\cos \theta_1 = \cos \theta$$

et conséquemment

$$\theta_1 = \theta.$$

Le théorème est ainsi démontré.

On procède d'une façon analogue dans le plan lobatschewskien,

§ 88

Image d'une droite et d'un cercle. — On reconnaît des équations (1) que les conditions

$$\omega = \text{const.}, \quad R = \text{const.}$$

entraînent respectivement les autres

$$\omega_1 = \text{const.}, \quad R_1 = \text{const.},$$

et réciproquement. On en conclut :

Une droite non-euclidienne issue du pôle O a pour image une droite issue du pôle O₁ ; et réciproquement.

Un cercle non-euclidien ayant le centre au pôle O a pour image un cercle ayant le centre au pôle O₁ ; et réciproquement.

Avant d'envisager le cas général remarquons que, suivant que le plan est riemannien, lobatschewskien, euclidien, la droite et le cercle sont définis respectivement par une des équations polaires :

$$(6) \quad \text{tg } R = \frac{\text{tg } m}{\cos (\omega - \varepsilon)}$$

$$(6') \quad \text{th } R = \frac{\text{th } m}{\cos (\omega - \varepsilon)}$$

$$(6'') \quad R_1 = \frac{m_1}{\cos (\omega - \varepsilon)},$$

où (m, m_1) désignent les distances des droites au pôle, et ε une constante

$$(7) \quad \cos a \cos R + \sin a \sin R \cdot \cos \omega - \cos r = 0$$

$$(7') \quad \operatorname{ch} a \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} R \cos \omega - \operatorname{ch} r = 0$$

$$(7'') \quad R_1^2 - 2a_1 R_1 \cos \omega + a_1^2 - r_1^2 = 0,$$

où (r, r_1) désignent les rayons des cercles et (a, a_1) la distance de leurs centres au pôle.

Remarquons en outre que l'on déduit des équations (1), (1')

$$(8) \quad \sin R = \frac{4 R_1}{4 + R_1^2}, \quad \cos R = \frac{4 - R_1^2}{4 + R_1^2}, \quad \operatorname{tg} R = \frac{4 R_1}{4 - R_1^2}$$

$$(8') \quad \operatorname{sh} R = \frac{4 R_1}{4 - R_1^2}, \quad \operatorname{ch} R = \frac{4 + R_1^2}{4 - R_1^2}, \quad \operatorname{th} R = \frac{4 R_1}{R_1^2 + 4}.$$

Nous avons ainsi toutes les formules nécessaires à notre but.

I° — Que l'on transforme les relations (6), (6') à l'aide respectivement des formules (8), (8'). On obtient ainsi les équations

$$(9) \quad R_1^2 - 4 \cot m \cdot R_1 \cos (\omega - \varepsilon) - 4 = 0$$

$$(9') \quad R_1^2 - 4 \coth m \cdot R_1 \cos (\omega - \varepsilon) - 4 = 0$$

ayant même forme que l'équation (7'') du cercle euclidien.

Or comme l'on tire d'ici par identification

$$(10) \quad r_1 = \frac{2}{\sin m}, \quad a_1 = 2 \cot m$$

$$(10') \quad r_1 = 2 \sqrt{\coth^2 m + 1} = \frac{2 \sqrt{\operatorname{ch}(2m)}}{\operatorname{ch} m}, \quad a_1 = 2 \coth m,$$

on a le théorème: *L'image de la droite* $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannienne (6)} \\ \text{lobatschewskienne (6')} \end{array} \right\}$ *est le cercle* $\left\{ \begin{array}{l} (9) \\ (9') \end{array} \right\}$ *dont le rayon* r_1 *et la distance* a_1 *du centre au pôle sont exprimés par les relations* $\left\{ \begin{array}{l} (10) \\ (10') \end{array} \right\}$.

II° — En opérant d'une façon analogue sur les équations (7), (7') on trouve respectivement

$$(11) \quad (\cos a + \cos r) R_1^2 - 4 \sin a \cdot R_1 \cos \omega - 4 (\cos a - \cos r) = 0$$

$$(11') \quad (\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} r) R_1^2 - 4 \operatorname{sh} a \cdot R_1 \cos \omega + 4 (\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} r) = 0.$$

Ces équations, *dans le cas général*, sont du type de l'équation (7'') du cercle euclidien, et leur comparaison donne respectivement

$$(12) \quad r_1 = -\frac{2 \sin r}{\cos a + \cos r}, \quad a_1 = -\frac{2 \sin a}{\cos a + \cos r}$$

$$(12') \quad r_1 = -\frac{2 \operatorname{sh} r}{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} r}, \quad a_1 = -\frac{2 \operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} r}.$$

Mais il y a ici les deux cas particuliers intéressants

$$\cos a + \cos r = 0, \quad \cos a - \cos r = 0$$

pour l'équation (11), et les autres

$$\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} r = 0, \quad \operatorname{ch} a - \operatorname{ch} r = 0$$

pour l'équation (11'), que l'on doit examiner à part.

Cas particuliers de l'équation (11). — Si l'on suppose

$$\cos a + \cos r = 0, \quad \text{et conséquemment} \quad a + r = \pi,$$

le cercle riemannien donné passe par le point O' opposé au pôle O et l'équation (11) revient à l'autre

$$(13) \quad R_1 = \frac{2 \cot r}{\cos \omega},$$

qui définit évidemment une droite.

Dans l'hypothèse $\cos a - \cos r = 0$, on a la condition $a = r$ exprimant que le cercle riemannien donné passe par le pôle O . Dans ce cas les équations (11), (12) reviennent aux autres

$$(14) \quad R_1 = 2 \operatorname{tg} r \cdot \cos \omega$$

$$a_1 = r_1 = \operatorname{tg} r.$$

Cas particuliers de l'équation (11'). — En supposant $\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} r = 0$, l'équation (11') se réduit à

$$(13') \quad R_1 = \frac{2 \coth a}{\cos \omega}.$$

C'est l'équation polaire d'une droite.

L'autre condition $\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} r = 0$ donne $a = r$, ce qui dé-

montre que le cercle lobatschewskien passe par le pôle O. Dans ce cas les équations (11'), (12') reviennent aux autres

$$(14') \quad R_1 = 2 \operatorname{th} r \cdot \cos \omega$$

$$a_1 = r_1 = \operatorname{th} r.$$

En résumant tout ce que l'on vient d'exposer, on a le théorème: *L'image du cercle générique $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{riemannien } (7) \\ \text{lobatschewskien } (7') \end{smallmatrix} \right\}$ est le cercle euclidien $\left\{ \begin{smallmatrix} (11) \\ (11') \end{smallmatrix} \right\}$ dont le rayon r_1 et la distance a_1 du centre au pôle sont exprimés par les relations $\left\{ \begin{smallmatrix} (12) \\ (12') \end{smallmatrix} \right\}$. Si le cercle donné passe par le point opposé au pôle $\left\{ \begin{smallmatrix} (12) \\ (12') \end{smallmatrix} \right\}$, son image euclidienne se vérifie la condition $\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} r = 0$ $\left\{ \begin{smallmatrix} (13) \\ (13') \end{smallmatrix} \right\}$. Si enfin le cercle donné passe par le pôle, son image euclidienne se réduit au cercle $\left\{ \begin{smallmatrix} (14) \\ (14') \end{smallmatrix} \right\}$ passant par le pôle.*

§ 89

Question inverse. — Avant d'aborder la question inverse de trouver les lignes non-euclidiennes ayant pour image une droite ou une cercle, remarquons que l'on déduit des équations (1), (1'):

$$(15) \quad R_1 = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos R}{1 + \cos R}} = \frac{2 \sin R}{1 + \cos R}$$

$$(15') \quad R_1 = 2 \sqrt{\frac{\operatorname{ch} R - 1}{\operatorname{ch} R + 1}} = \frac{2 \operatorname{sh} R}{\operatorname{ch} R + 1}$$

I° — Cela posé, si l'on transforme l'équation (6'') successivement à l'aide des relations (15) et (15'), on obtient les équations

$$(16) \quad m_1 \cos R - 2 \sin R \cdot \cos (\omega - \varepsilon) + m_1 = 0$$

$$(16') \quad m_1 \operatorname{ch} R - 2 \operatorname{sh} R \cdot \cos (\omega - \varepsilon) + m_1 = 0.$$

Celles-ci, comparées aux équations (7), (7'), donnent respectivement

$$\cos a + \cos r = 0, \quad \operatorname{tg} r = \frac{2}{m_1}$$

$$\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} r = 0, \quad \operatorname{th} r = \frac{2}{m_1}.$$

D'ici le théorème: *La ligne* $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannienne} \\ \text{lobatschewskienne} \end{array} \right\}$ *ayant pour image la droite euclidienne (6'') est le cercle* $\left\{ \begin{array}{l} (16) \text{ passant par le point opposé au pôle} \\ (16') \text{ vérifiant la condition } \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} r = 0 \end{array} \right\}$, *et dont le rayon r est défini par la relation* $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} r = \frac{2}{m_1} \\ \operatorname{th} r = \frac{2}{m_1} \end{array} \right\}$.

II° — En opérant d'une façon analogue sur l'équation (7''), on trouve

$$(17) \quad (r_1^2 - a_1^2 + 4) \cos R + 4a_1 \sin R \cdot \cos \omega + (r_1^2 - a_1^2 - 4) = 0$$

$$(17') \quad (r_1^2 - a_1^2 - 4) \operatorname{ch} R + 4a_1 \operatorname{sh} R \cdot \cos \omega + (r_1^2 - a_1^2 + 4) = 0.$$

Ces équations, dans le cas général, ont respectivement même forme que les équations (7), (7') des cercles non-euclidiens. Leur comparaison donne

$$(18) \quad \cos r = -\frac{r_1^2 - a_1^2 - 4}{\sqrt{(r_1^2 - a_1^2 + 4)^2 + 16a_1^2}}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{4a_1}{r_1^2 - a_1^2 + 4}$$

$$(18') \quad \operatorname{ch} r = \frac{r_1^2 - a_1^2 + 4}{\sqrt{(r_1^2 - a_1^2 - 4)^2 + 16a_1^2}}, \quad \operatorname{th} a = -\frac{4a_1}{r_1^2 - a_1^2 - 4}.$$

Dans le cas particulier que le cercle euclidien passe par le pôle, on a $a_1 = r_1$ et les équations (18), (18') reviennent aux autres

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} r = r_1, \quad \operatorname{th} a = \operatorname{th} r = r_1.$$

Cette analyse démontre le théorème: *La ligne* $\left\{ \begin{array}{l} \text{riemannienne} \\ \text{lobatschewskienne} \end{array} \right\}$ *ayant pour image le cercle euclidien (7'') est le cercle* $\left\{ \begin{array}{l} (17) \\ (17') \end{array} \right\}$ *dont le rayon r et la distance a du centre au pôle, sont définis par les équations* $\left\{ \begin{array}{l} (18) \\ (18') \end{array} \right\}$. *Cette ligne non-euclidienne, dans le cas où le cercle image passe par le pôle, se réduit à un cercle passant par el pôle, et dont le rayon r est défini par la relation* $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} r = r_1 \\ \operatorname{th} r = r_1 \end{array} \right\}$.

(A suivre.)

INDEX

	Pag.
C. SERVAIS : <i>Sur les centres de courbure principaux de trois quadriques homofocales</i>	5, 91, 166, 193
GONÇALO SAMPAIO: <i>Pródromo da flora portugueza</i>	44
PAUL APPELL: <i>Les polynomes d'Hermite rattachés aux polynomes de Legendre</i>	65
F. GOMES TEIXEIRA: <i>Sobre os integraes de Fresnel</i>	69
ALPHONSE LUISIER: <i>Notes de bryologie portugaise</i>	73
A. AURELIO DA COSTA FERREIRA: <i>Sur une particularité de la courbe médiane de quelques cranes portugais</i>	80
J. ROSE: <i>Sur la courbe aérolaire d'une courbe donnée</i>	84
AARÃO FERREIRA DE LACERDA: <i>A comemoração darwineana celebrada pela Universidade de Cambridge</i>	129
GONÇALO SAMPAIO: <i>Plantas novas para a flora portugueza</i>	157
" " <i>Nota a proposito dos Quercus lusitanica, Lamk., Q. humilis, Lamk., e Q. faginea, Lamk.</i>	161
PAUL APPELL: <i>Sur les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite et les polynomes X_n de Legendre</i>	209
D. POMPEIU: <i>Sur les fonctions représentées par des intégrales définies</i>	214
F. GOMES TEIXEIRA: <i>Sobre o methodo de Gauss para o calculo approximado dos integraes definidos</i>	220
GEMINIANO PIRONDINI: <i>Essai d'une théorie analytique des lignes non-euclidiennes</i>	224

1185-45-
 Univ. C. E.
 Author Acad. polytech. de
 Title Port. Ann des Sci. - 5-

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

Physical &
 Applied Sci. —
 Serials

Do not
 remove
 the card
 from this
 Pocket.

STORAGE

Acme Library Card Pocket
 Under Pat. "Ref. Index File."
 Made by LIBRARY BUREAU

